Zbirka nalog

Matematika III

- v pripravi -

Matevž Črepnjak

Poglavje 1

Linearna algebra

1.1 Vektorski prostori

Definicija 1.1.1 *Neprazni množici V, ki je opremljena z operacijama*

1. $+ : V \times V \to V$,
2. $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$,

ki zadoščata pogojem

(i) $\forall x, y \in V \, : \, x + y = y + x$,

(ii) $\forall x, y, z \in V \, : \, (x + y) + z = x + (y + z)$,

(iii) $\exists\, 0 \in V, \forall x \in V \, : x + 0 = 0 + x = x$,

(iv) $\forall x \in V, \exists - x \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0$,

(v) $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} \, : \, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

(vi) $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \, : \, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,

(vii) $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \, : \, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$,

(viii) $\exists\, 1 \in \mathbb{F}, \forall x \in V \, : \, 1 \cdot x = x$,

pravimo vektorski prostor *(nad obsegom $\mathbb{F}$). Elemente množice V imenujemo* vektorji*, elementi $\mathbb{F}$ pa so skalarji. Nevtralni element* 0 *vektorskega prostora* $(V, +, \cdot)$ *imenujemo ničelni vektor.*

Definicija 1.1.2 *Neprazna podmnožica W vektorskega prostora V je vektorski podprostor, če je zaprta za seštevanje in množenje s skalarji:*

- $\forall x, y \in W \ : \ x + y \in W$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ *in* $\forall x \in W \ : \ \alpha \cdot x \in W$.

Naloge:

1. Na množici $\mathbb{R}^2$ naj bosta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem na naslednji način:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2) &= (x_1, \lambda\, x_2)\end{aligned}$$

   Ali je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ vektorski prostor?

2. Na množici $\mathbb{R}^3$ naj bo definirano standardno seštevanje, množenje s skalarjem pa na naslednji način

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \lambda\, x_3)$$

   Ali je $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ vektorski prostor?

3. Na množici $\mathbb{R}^2$ naj bo definirano standardno množenje s skalarjem, seštevanje pa na sledeč način

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + 3\, y_1, 2\, x_2 + y_2)$$

   Ali je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ vektorski prostor?

4. Naj bo M množica vseh točk premice skozi koordinatno izhodišče v $\mathbb{R}^2$, kjer imamo standardni operaciji sešteveanja in množenja s skalarjem. Ali je $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor?

5. Naj bo M množica vseh točk premice, ki ne gre skozi koordinatno izhodišče v $\mathbb{R}^2$, kjer imamo standardni operaciji seštevenja in množenja s skalarjem. Ali je $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor?

6. Ali je množica vseh polinomov s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem vektorski prostor?

7. Naj bo $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 > 0\}$ opremljena s standardnima operacijama. Ali je $(M, +, \cdot)$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^2$?

8. Naj bo $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}\}$. Ali je $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

9. Naj bo $M_n(R)$ vektorski prostor realnih $n \times n$ matrik s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem.

   a) Ali je množica vseh diagonalnih matrik vektorski podprostor od $M_n(R)$?

   b) Ali je množica vseh matrik oblike

   $$\begin{bmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

   vektorski podprostor od $M_2(\mathbb{R})$?

10. Naj bo $\mathcal{C}[a, b]$ množica vseh zveznih realnih funkcij na $[a, b]$.

    a) Ali je množica vseh polinomov stopnje kvečjemu n, $\mathbb{R}_n[x]$, vektorski podprostor $\mathcal{C}[a, b]$?

    b) Ali je množica vseh funkcij, za kater je $f(5) = 10$ vektorski podprostor od $\mathcal{C}[a, b]$, če je $a \leq 5 \leq b$?

11. Naj bo W množica točk ravnine skozi koordiantno izhodišče v $\mathbb{R}^3$. Ali je W vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$ s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem?

12. Naj bo W množica matrik oblike

    $$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \\ d & e \end{bmatrix}.$$

    Ali je $(W, +, \cdot)$ vektorski podprostor prostora pravokotnih matrik $M_{3,2}(\mathbb{R})$ s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem?

13. Ali je množica vseh diagonalnih matrik skupaj s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem vektorski podprostor vektorskega prostora vseh zgornje trikotnih matrik skupaj s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem?

14. Naj bo $V = \mathbb{R}_5[x]$ vektorski prostor vseh polinomov stopnje kvečjemu pet in $U = \{p \in V \mid p(0) = 0\}$, $W = \{p \in V \mid p'(0) = 0\}$. Ali sta $(U, +, \cdot)$ in $(W, +, \cdot)$ vektorska podprostora $(V, +, \cdot)$?

1.2 Linearna neodvisnost

Definicija 1.2.1 *Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in $v_1, \ldots, v_n \in V$. Za skalarje $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ pravimo izrazu oblike $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$* linearna kombinacija *vektorjev $v_1, \ldots, v_n \in V$. Skalarji $a_1, \ldots, a_n$ so pri tem koeficienti te linearne kombinacije. Množico vseh možnih linearnih kombinacij vektorjev $v_1, \ldots, v_n$ imenujemo* linearna ogrinjača *ali* linearna lupina *in označimo $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$.*

Definicija 1.2.2 *Množica vektorjev $v_1, \ldots, v_n \in V$ je linearno neodvisna, če je $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, samo takrat, ko je $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.*

Naloge:

1. Vektor $\vec{a} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$, razstavi v smeri vektorjev $\vec{p} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ in $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
2. Podan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$ in $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ter $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.
   (a) Vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ in $\overrightarrow{FC}$ izrazi kot linearno kombinacijo $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
   (b) V kakšnem razmerju BD deli AC?
3. Dokaži, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.
4. Poišči linearno lupino, določeno z vektorjema
$$\vec{x} = (1, 0, 0, 1) \text{ in } \vec{y} = (0, 2, 0, -1)\,.$$
5. Ali je linearna lupina vektorjev
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   enaka $M_2(\mathbb{R})$
6. Poišči tri različne množice, za katere bo veljajo, da je njihova linearna lupina enaka $\mathbb{R}_3[x]$.
7. Ali je linearna lupina vektorjev
   (a) $\vec{x}_1 = (2, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = (-1, 3, 4), \vec{x}_3 = (1, 1, -2)$;
   (b) $\vec{x}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{x}_2 = (3, -1, 1), \vec{x}_3 = (-3, 8, -5)$.

   enaka $\mathbb{R}^3$?

8. Preveri linarno neodvisnost vektorjev $(1, -2, 3, -4), (-1, 3, 4, 2), (1, 1, -2, -2)$.

9. Dani so vektorji iz $\mathbb{R}^4$:

   $$\vec{x}_1 = (1, -2, 0, 1),\ \vec{x}_2 = (0, 1, -1, -3),\ \vec{x}_3 = (1, 0, -2, -5),\ \vec{x}_4 = (-3, 5, 1, 0)\,.$$

   Ali lahko $\vec{x}_4$ predstavimo kot linearno kombinacijo preostalih vektorjev?

10. Preveri, ali je naslednja množica vektorjev (matrik) linearno neodvisna.

    (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Ali so polinomi

    $$p_1(x) = 2x^2 - x + 7,\ p_2(x) = x^2 + 4x + 2,\ \text{in } p_3(x) = x^2 - 2x + 4$$

    linearno neodvisni?

12. Dokaži, da če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno nedovisni, potem so tudi vektorji $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ in $\vec{c} + \vec{a}$ linearno neodvisni.

1.3 Baza

Definicija 1.3.1 *Množica vektorjev* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ *je* baza *vektorskega prostora* V*, če*

(i) $V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ *in*

(ii) $\mathcal{B}$ *je linearno neodvisna množica.*

Elemente baze imenujemo bazni vektorji.

Definicija 1.3.2 *Vektorski prostor* $(V, +, \cdot)$ *je dimenzije* n*, če njegova baza moči* n*.*

Naloge:

1. Ali je množica vektorjev

   (a) $\vec{x}_1 = (2, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = (-1, 3, 4)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, -2)$,

   (b) $\vec{x}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (3, 0, -1)$,

   (c) $\vec{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = (0, 3, 4)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{x}_4 = (1, 1, 1)$.

   baza prostora $\mathbb{R}^3$?

2. Dana je množica vektorjev

$$M = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}.$$

   (a) Pokaži, da množica M ni baza prostora $\mathbb{R}^4$?

   (b) Dopolni M do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

3. Poišči koordinatni vektor za $p(x) = 4 - 2x + 3x^2$ glede na

   (a) standardno bazo prostora polinomov stopnje kvečjemu dva $\mathbb{R}_2[x]$,

   (b) bazo $\mathcal{B} = \{p_1(x) = 2,\ p_2(x) = -4x,\ p_3(x) = 5x^2 - 1\}$.

4. Kateri izmed

$$p_0(x) = 2,\ p_1(x) = -2x,\ p_2(x) = x-4,\ p_3 = x^2-4x,\ p_4(x) = x^2+2x+1\,.$$

   tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$?

5. Ali sta množici $\{\sin^2 x, \frac{1}{4}\cos^2 x, 5\}$ in $\{xe^x, e^{2x}\}$ linearno neodvisni v vektorskem prostoru vseh zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

6. Naj bo $M_2(\mathbb{C})$ množica kompleksnih 2×2 matrik.
   (a) Poišči kako bazo kompleksnega prostora vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$.
   (b) Poišči kako bazo realnega prostora vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$.
7. Dani so vektorji
$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 2), \vec{v}_3 = (3, 0, -1).$$
   (a) Pokaži, da vektorji določajo bazo $\mathcal{B}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (b) Naj bo $\mathcal{B}'$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$. Izračunaj $[u]_{\mathcal{B}}$, če je $[u]_{\mathcal{B}'} = (9, -1, 8)$.
8. Dani sta množici $\mathcal{B} = \{(1, -1), (0, 6)\}$ in $\mathcal{C} = \{(2, 1), (-1, 4)\}$.
   (a) Pokaži, da sta obe množici bazi prostora $\mathbb{R}^2$,
   (b) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.
   (c) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v $\mathcal{C}$.
9. Dani sta bazi $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 2), (3, 0, -1)\}$ in $\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (a) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v standardno bazo.
   (b) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v standardno bazo.
   (c) Poišči matriko prehoda iz standardne baze v bazo $\mathcal{B}$.
   (d) Poišči matriko prehoda iz standardne baze v bazo $\mathcal{C}$.
   (e) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$.
10. Naj bo $\mathcal{B}$ standardna baza prostora $M_2(\mathbb{R})$ in $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, kjer je
$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.
   (b) Poišči matriko, katere koordinatni vektor je $[X]_{\mathcal{C}} = (-8, 3, 5, -2)$.
11. Naj bo $\mathcal{B}$ standardna baza prostora polinomov stopnje kvečjemu dva $\mathbb{P}_2$ in $\mathcal{C} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, kjer je $p_1(x) = 2$, $p_2(x) = -4x$, $p_3(x) = 5x^2 - 1$.
   (a) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.

(b) Poišči polinom, katerega koordinatni vektor je $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = (-4, 3, 11)$.

12. Dana je množica $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Pokaži, da je $(U, +, \cdot)$ vektorski podprostor v prostoru realnih 2×2 matrik $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Poišči bazo in dimenzijo U.

1.4 Evklidski prostori

Definicija 1.4.1 *Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F}$, $u, v, w \in V$ in $\lambda \in \mathbb{F}$.* Skalarni produkt *vektorjev u in v je preslikava, ki vektorjema u in v priredi realno število $\langle u, v\rangle$ in zadošča naslednjim pogojem:*

(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$,

(ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,

(iii) $\langle \lambda\, u, v\rangle = \lambda\, \langle u, v\rangle$,

(iv) $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle > 0$.

Naloge:

1. Naj bosta $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^{\ltimes}$ ter naj bodo $w_1, w_2, \ldots, w_n$ pozitivna realna števila (uteži). Pokaži, da je s predpisom

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i v_i$$

definiran skalarni produkt. (Ta produkt imenujemo *uteženi* standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^n$.)

2. Naj bosta $u = (2, -1, 4)$ in $v = (3, 2, 0)$ vektorja iz $\mathbb{R}^3$, ki je opremljen z uteženim standardnim skalarnim produktom, pri čemer so uteži $w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{4}, w_3 = \frac{1}{2}$. Izračunaj

$$\langle u, v\rangle\,, ||u||, d(u, v)\,.$$

Ali sta vektorja u in v ortogonalna glede na

(a) standardni skalarni produkt,

(b) uteženi standardni produkt iz prejšnje naloge?

3. Za $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ in za poljubno realno funkcijo u, definiramo

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 u(x)p(x)q(x)\, dx.$$

Ali je $\mathbb{R}_n[x]$ s tako definiranim produktom evklidski prostor?

4. Za $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ definiramo
$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$
Ali je $\mathcal{C}[a, b]$ s tako definiranim produktom evklidski prostor?

5. V prostoru $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ definiramo skalarni produkt matrik na naslednji način
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{sled}(B^T A)\,.$$
Ali je $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ s tako definiranim produktom evklidski prostor? (Opomba: *sled* kvadratne matrike A, $\mathrm{sled}(A)$, je vsota njenih diagonalnih elementov.)

1.5 Ortonormirana baza

Definicija 1.5.1 *Naj bosta u in v vektorja unitarnega prostora. Vektorja u in v sta* ortogonalna*, ko je*

$$\langle u, v \rangle = 0 \,.$$

Definicija 1.5.2 *Pravimo, da je množica vektorjev S iz unitarnega prostora* ortogonalna*, če je poljuben par vektorjev iz S ortogonalen. Nadalje, pravimo da je S* ortonormirana množica*, če je S ortogonalna množica in je norma vsakega vektorja iz S enaka 1.*

Definicija 1.5.3 *Če je $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza evklidskega prostora ortogonalna oziroma ortonormirana, potem jo imenujemo* ortogonalna baza *oziroma* ortonormirana baza*.*

Naloge:

1. Razširi množico $S = \{(2, 0, -1), (2, 0, 4)\}$ v ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ glede na standardni skalarni produkt.

2. Določi ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje vektor $v_1 = (1, 2, 3)$.

3. Glede na standardni skalarni produkt skunstruiraj iz vektorjev $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (2, 1, -3), v_3 = (0, 2, 1))$ ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

4. Iz baze $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 0, 0), v_4 = (1, 0, 0, 0)$ prostora $\mathbb{R}^{\ntrianglerighteq}$ s standardnim evklidskim skalarnim produktom skonstruiraj ortonormirano bazo.

5. Ali je množica $V = \{1, x, \sin(x)\}$ glede na definiran skalarni produkt,

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) \, dx,$$

ortonormirana?

6. V evklidskem prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ s skalarnim produktom

$$\langle p | q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \, dx$$

poišči kako ortogonalno bazo.

7. Glede na skalarni produkt v nalogi 5 skonstruiraj ortonormirano bazo $M_2(\mathbb{R})$.

1.6 Fourierova vrsta

Naj bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx\omega) + b_n \sin(nx\omega)),$$

kjer je

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P} f(x) \\ a_n &= \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos(nx\omega) \\ b_n &= \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\sin(nx\omega), \end{aligned}$$

$\omega = \frac{2\pi}{P}$.

Naloge:

1. Funkcijo f, $f(x) = 2$, razvij na $[0, \pi]$ v sinusno trigonometrijsko vrsto.
2. Funkcijo f, $f(x) = x^2$, razvij na $[0, \pi]$ v kosinusno trigonometrijsko vrsto in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots.$$

3. Naj bo $a > 1$. Funkcijo $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -a \le x < -1 \\ a & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad -1 < x \le a \end{cases}$$

   razvij v Fourierjevo vrsto.
4. Naj bo $a > 1$. Funkcijo $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\frac{x}{3})$, razvij v Fourierjevo vrsto in izračunaj vsoto vrste $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 - 1}$.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: *Naloge iz algebre I*, DMFA, Ljubljana, 2011.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić, *Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena naloga iz linearne algebre*, PEF, Ljubljana, 1996.

[3] E. Kramar *Rešene naloge iz linearne algebre*, DMFA, Ljubljana.