Skupina odda en skupen izvod **pol ure pred testom v kabinetu A-415**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem** http://atom.uni-mb.si/ ukemat/VpisniList.pdf. Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

2. domača naloga

1. Funkciji f in g sta podani s predpisi

$$f(x) = 2x-1 \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \arcsin(\frac{x}{2}) & ; \quad |x| < 2 \\ e^{x+2} & ; \quad |x| \geq 2. \end{cases}$$

Izračunaj oba kompozituma funkcij.

2. Funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sta podani takole

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|+1} & ; \quad |x| < 1 \\ \pi - \arctan(|x|) & ; \quad |x| \geq 1. \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + \ln(1 - \dfrac{1}{x}) & ; \quad x < 0 \\ \sqrt{3} & ; \quad x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Natančno nariši graf funkcije f in preuči injektivnost ter surjektivnost funkcije f.

   (b) Izračunaj $f \circ g$.

3. Zaporedje je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n^2-2}{3n^2+3}.$$

   (a) Razišči zaporedje a_n.

   (b) Od katerega člena dalje se vsi členi razlikujejo od limitne vrednosti za manj od $\frac{1}{200}$?

4. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 3, \ a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+1}.$$

Ali je zaporedje (a_n) naraščajoče? Ali je zaporedje (a_n) konvergentno? Utemelji!

5. Zaporedje (a_n) je podano takole

$$a_1 = 2 \ \text{ in } \ a_{n+1} = \frac{3}{a_n} + \frac{a_n}{2}.$$

Ali je $a_n \in [1, 6]$ za vsak $n \in \mathbb{N}$? Utemelji!

6. Ali spodnje vrste konvergirajo? Utemelji!

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(n!)}{n^3+1}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+7}{n+5}\right)^{2n-2}$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{2n^2}$.

7. Preveri konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{8^{n+1}}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4(n+3)}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{4n^2}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-2}{5n+4}\right)^{3n}$,

   (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2n-3}{(n^2+3n)^2}$,

   Če vrsta konvergira, izračunaj tudi vsoto vrste.

8. Obravnavaj konvergenco funkcijske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{x}{4} = \ln \frac{x}{4} + \ln^2 \frac{x}{4} + \ln^3 \frac{x}{4} + \ldots,$$

   kjer je $x \in \mathbb{R}$.

9. Poišči vsa realna števila x za katera konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2(x-2)^{2n}}.$$

10. Izračunaj

    (a) $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x^2 - x\pi}$,

    (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\sin 2x}$,

    (c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{6(x-1)}$,

    (d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{e^{3x}}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} & ; \quad x > 0 \\ ax + b & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^4-1} & ; \quad x < -1, \end{cases}$$

    kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$. Določi a in b tako, da bo f zvezna na množici realnih števil.