1. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **pol ure pred prvim testom v kabinetu A-415**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem** http://www.fkkt.um.si/ukemat/UniMat1.php. Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Izračunaj A^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bosta $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ zgornje trikotni matriki, za kateri velja, da je $A-B$ takšna zgornje trikotna matrika, ki ni diagonalna matrika in ima po diagonali same enice. Dokaži, da je potem $(A-B)^n \neq I$, za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Utemelji!

4. Naj bosta $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ antisimetrični matriki.
   (a) Ali je AB antisimetrična matrika? Utemelji!
   (b) Reši enačbo $A^2 = I$.

5. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$
$$A = \begin{bmatrix} n & n & n & \dots & n & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

6. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$, ki podana takole

$$a_{i\,j} = \begin{cases} (-1)^i & ; \quad 1 \le i, j \le n, \; i = j \\ 1 & ; \quad 2 \le i \le n, \; j = 1 \\ (-1)^j & ; \quad i = 1, \; 2 \le j \le n \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

Vsak korak utemelji!

9. Reši matrično enačbo

$$AX = B^T X + C,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Reši matrično enačbo

$$(A + X)^T = (AX)^T - A,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Glede na realno število a poišči rešitve matrične enačbe
$$X^T = (2A^T - AX)^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Vsak odgovor utemelji!

12. Poišči vsa realna števila x, za katera A ni obrnljiva
$$A = \begin{bmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{bmatrix}.$$

13. Naj bo A obrnljiva matrika za katero velja $(I-A)^3 = 0$. Poišči A^{-1} (torej matriko A^{-1} izrazi v odvisnosti od I in A).

14. Poišči rešitev sistema enačb
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & - & 2w & - & u & = & 3 \\ -9x & + & 6y & - & 3z & + & 6w & + & 10u & = & -2 \\ 3x & - & y & + & 3z & - & w & - & u & = & 4 \end{array}$$

15. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax + 4z &= 1 \\ x + (a+1)y + 5z &= 2 \\ x + az &= -a-1. \end{aligned}$$

16. Za katere realne parametre a sistem
$$\begin{aligned} ax + y + 2z &= 1 \\ x + ay - 2z &= 0 \\ x + 2y - az &= 2-a \end{aligned}$$
ne bo enolično rešljiv? V teh primerih poišči rešitve.

17. Glede na realno število a je podan sistem linearnih enačb
$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= a \\ x - ay + 3z &= 1 \\ x - y + az &= -1 \end{aligned}$$

(a) Poišči vsa realna števila a, za katere je sistem protisloven? Utemelji!

(b) Poišči vsa realna števila a, za katere velja, da je rešitev za y enolična in pripada množici celih števil.