

3. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **na zagovoru domačih nalog**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem** <http://www.fkkt.um.si/ukemat/UniMat1.php>. Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

1. Reši diferencialni enačbi z ločljivima spremenljivkama

(a) $y' = \frac{\sqrt{1-x}}{y^2 - 2y}$,

(b) $(x^2 + 4)y' + y^2 = 4$.

2. Poišči rešitev homogene diferencialne enačbe

$$x^2 y' = y^2 + 3xy + 5x^2.$$

3. Poišči rešitev linerane diferencialne enačbe

$$y' \sin x + y \cos x = \cos 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Poišči rešitev Bernoullijeve diferencialne enačbe

$$y' + 4y \sin(2x) - e^{\cos(2x)} y^{\frac{1}{2}} = 0.$$

5. Poišči rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe

$$y' - 2xy + y^2 = -1 + 3x^2.$$

6. Poišči rešitev Clairoutove diferencialne enačbe

$$y = xy' + 2\sqrt{y'}.$$

7. Poišči rešitev Lagrangeove diferencialne enačbe

$$xy' + y + (y')^2 = 0.$$

8. Reši naslednje diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti

(a) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$,

(b) $2y''' + 2y' = y'' + y + e^{\frac{x}{2}}$,

(c) $y^{(iv)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = xe^x$,

(d) $y^{(iv)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$,

(e) $y''' - y'' + 2y = e^x \sin x$,

(f) $y''' - y'' + 2y = e^{2x} \sin 2x$.

Primer (a) reši na dva načina (s pomočjo variacije konstante in nastavki).
Kakšen nastavek je v primeru (b)?

9. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' - 3y'' + 4y' = -8y - 26e^{-x},$$

pri pogojih $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$ in $y''(0) = 4$.

10. S pomočjo potenčnih vrst poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + xy = 0.$$

Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$2y''' + 2y' = y'' + y + e^{\frac{x}{2}}.$$

11. Reši Eulerjeve diferencialne enačbe

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' = \ln x.$$

12. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'(e^{-y^2} - 2xy) = 1.$$

13. Reši diferencialno enačbo

$$xyy' - 2y^2 + x^2 = 0$$

pri pogoju $y(-1) = -1$.

14. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

15. V dvoliterski posodi, ki je zgoraj odprta, je en liter vode. V posodo po cevi dovajamo 36% klorovodikovo kislino s hitrostjo 1 deciliter na minuto. Predpostavimo, da se v vsakem trenutku tekočini dobro premešata in da v primeru, če je posoda polna, mešanica višek mešanice odteče iz posode. V kakšnem času bo v posodi 24% klorovodikova kislina?

16. Nina je pozabila steklenico limonade na soncu in tako se je limonada segrela na $50^\circ C$. Da bi limonado karseda hitro ohladila na $20^\circ C$, je steklenico limonade postavila v mrzlo vodo temperature $5^\circ C$. Po desetih minutah v tej vodi je temperatura steklenice limonade padla na $30^\circ C$. Izračunaj koliko časa bo Nina čakala, da se bo steklenice limonade iz $30^\circ C$ ohladila na $20^\circ C$.

Predpostavimo, da je se telo ohlaja po Newtonovem zakonu segrevanje oziroma ohlajanja (Newtonov zakon segrevanja oziroma ohlajanja pravi, da se temperatura telesa spreminja tako, da je hitrost spreminjanja temperature sorazmerna razliki temperature med telesom in okolico).

17. Populacija se spreminja po zakonu

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R}{M}(M - p)p,$$

kjer je t čas, p populacija, R koeficient rodnosti in M maksimalno število v populaciji.

- (a) Poišči funkcijo, ki opisuje spremembo populacije.
- (b) Kmet kupi za nadaljno rejo 10 zajcev. Ocenjuje, da je maksimalno število zajcev za katere lahko zagotovi prostor in hrano 100. V prvih treh mesecih po nakupu ima 15 zajcev. Koliko časa potrebuje, da bo imel 50 zajcev? Rezultat izrazi v letih. (Opomba: število zajcev se spreminja po zgoraj opisanem zakonu).