1. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **pol ure pred prvim testom v kabinetu A-415**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene na bele liste ter vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem** http://www.fkkt.um.si/ukemat/UniMatA.php.
Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

1. Funkcija f je podana s predpisom $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{y-x^2}\right)$.
   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga natančno skiciraj.
   (b) Če obstajajo, nariši nivojnice N_0, $N_{\frac{\pi}{2}}$ in N_π.
2. Funkcija f je podana s predpisom
   $$f(x,y) = \ln(y^2 - x - 2).$$
   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f.
   (b) Določi nivojnice funkcije f.
   (c) Določi prereze funkcije nad $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ in $y = -x$.
   (d) Izračunaj oba parcialna odvoda funkcije f.
3. Funkcija f je podans predpisom $f(x,y) = \ln(x(1+2y))$.
   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga skiciraj.
   (b) Zapiši enačbo nivojnice N_0 funkcije f in jo skiciraj.
   (c) Poišči ekstrem funkcije f pri pogoju $x + y = a$, če je $a > 0$.
4. Ali je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+y^3}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
   parcialno odvedljiva? Ali je zvezno parcialno odvedljiva? Utemelji!
5. Z diferencialom izračunaj približno vrednost izraza
   (a) $\frac{-1.03*0.97}{5.1}$,
   (b) $\ln(\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{0.94}) - 1$.
6. Potencial električnega polja v točki (x,y) se izraža kot $V = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Izračunaj spremembo V v točki $(2,2)$ v smeri točke $(4,3)$.
7. Če ima polinom $x^2 + ax + b$ realni ničli, potem funkcija g paru (a,b) priredi večjo od obeh ničel polinoma.

(a) Poišči definicijsko območje funkcije g.

(b) Izračunaj približno vrednost v točki $(-1.01, -1.97)$.

8. Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f, $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$, če obstajajo.

9. Poišči globalne minimume funkcije f, ki je podana s predpisom
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^5y^5},$$
pri pogoju
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1.$$

10. V $\mathbb{R}^3$ poišči kvader z največjim volumnom, za katerega velja, da ima tri ploskve na koordinatnih ravninah, eno oglišče pa ima na rotacijskem paraboloidu $z = 4 - x^2 - y^2$. Koliko je volumen tega kvadra?

11. Izračunaj (najkrajšo) razdaljo med premicama v prostoru
$$p \;:\; x = t,\ y = 1 + t,\ z = 1,\ \ t \in \mathbb{R}$$
in
$$q \;:\; x = 2s,\ y = 0,\ z = 3s,\ \ s \in \mathbb{R}.$$

12. Za funkcijo f, $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x-y+z}$, zapiši Taylorjev polinom druge stopnje v točli $(1,1,1)$.

13. Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev
$$x^2 + y^2 = Ry \ \text{ in } \ z^2 = x^2 + y^2, \ \text{ kjer je } \ z \geq 0.$$
   (a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$ in jo natančno nariši kot presek ploskev.
   (b) Izračunaj enačbo tangente v točki $(0, R, z)$. Ali tangenta poteka skozi točko $(R, -R, 0)$? Utemelji!

14. Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev
$$z^2 - 1 = x^2 + y^2 + 2y,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ \text{kjer je } z \geq 0.$$
   (a) Skiciraj in parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$.
   (b) Poišči točko na krivulji $\mathcal{K}$, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču.

15. Parametriziraj in skiciraj ploskev, ki je določena takole
   (a) $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$,
   (b) $x^2 - 2x + y^2 = 3$, $0 \leq z \leq 1$,
   (c) $x^2 - 2x + y^2 \leq 3$, $z = 1$,
   (d) $x^2 + y^2 - y + z^2 = 1$.

16. Zapiši enačbo tangentne ravnine na ploskev $\mathcal{P} : x^2 + y^2 + 1 = -xz$ v tistih točkah, kjer krivulja $\mathcal{K} : r(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 2)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, seka ploskev $\mathcal{P}$.

17. Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Izračunaj

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f).$$

18. Reši diferencialno enačbo

$$xy''(x) + (4x - 1)y'(x) + (4x - 2)y(x) = 0$$

pri pogoju $y(0) = 0$.

19. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$x'(t) + \int_0^t x(\tau)\mathrm{ch}(t - \tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

pri pogoju $x(0) = 1$.

20. Poišči rešitev sistema

$$\begin{aligned} t\,y'(t) + y(t) &= t^2 \\ x''(t) - y(t) &= \sin\left(\frac{t}{2}\right), \end{aligned}$$

kjer je $x(0) = x'(0) = 0$ ter $y(0)$ in $y'(0)$ poljubni pozitivni konstanti.

21. Poišči rešitev sistema

$$\begin{aligned} \int_0^t x(s)\mathrm{d}s + x'(t) &= 2\cos(t) \\ \int_0^t y(s)\mathrm{d}s - x(t) &= 0, \end{aligned}$$

kjer je $x(0) = 1$.