2. domača naloga

Domače naloge naj bodo zaporedoma in čitljivo zapisane ter vložene v mapo skupaj z obrazcem http://www.fkkt.um.si/ukemat/VpisniList.pdf. Drugi sklop domačih nalog je potrebno oddati na zagovoru domačih nalog (objavljeno na spletni strani).

1. Poišči bazo vektorskega prostora $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}) \mid 2x_1 - x_3 = 0\}$ v $\mathbb{R}^3$ ter določi njeno dimenzijo.

2. Poišči bazo vektorskega prostora $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$ v $M_3(\mathbb{R})$ ter določi njeno dimenzijo.

3. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$ je definiran produkt vektorjev $\vec{x} = (x_1, x_2)$ in $\vec{y} = (y_1, y_2)$ na naslednji način:
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1.$$
Ali je tako definiran produkt skalarni produkt? Utemelji!

4. Ali je s predpisom
$$< p, q >= \int_0^1 x(p(x) - q(x))^2 \, \mathrm{d}x$$
kjer sta $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}_n[x]$? Utemelji!

5. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Na vektorski prostor $\mathbb{R}_n[x]$ vpeljemo
$$< p, q >= \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i)q(x_i),$$
kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ paroma različna poljubna realna števila in $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$.
   (a) Dokaži, da je zgoraj vpeljan produkt skalarni produkt.
   (b) Naj bodo $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Ortogonaliziraj bazo $\mathcal{B} = \{1, x, x^2 - 1\}$ in zapiši $p(x) = x^2$ s pomočjo izračunane ortogonalne baze.

6. Naj bosta $\mathcal{B} = \{1, x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1, x^4 - 1\}$ in $\mathcal{C} = \{1, (x - 3), (x - 3)^2, (x - 3)^3, (x - 3)^4\}$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{C}$ baza za $\mathbb{R}_4[x]$.
   (b) Poišči matriko prehoda iz $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.
   (c) Zapiši polinom $p(x) = x^4 - x^3 + 3x - 1$ po bazi $\mathcal{C}$. (Namig: nalogo se da rešiti tudi s Taylorjevo formulo (Matematika I), toda ni obvezno rešiti na ta način).

7. Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana na naslednji način: $\mathcal{A}(0,1,0) = (2,0,1)$, $\mathcal{A}(1,1,0) = (-1,0,1)$, $\mathcal{A}(0,2,-1) = (2,0,0)$.
   (a) Poišči eksplicitni predpis preslikave f ter določi $\mathcal{K}er(f)$ in $\mathcal{I}m(f)$.
   (b) Glede na standardno bazo zapiši matriko, ki pripada $\mathcal{A}$.
8. Dana je linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ki je podana s predpisom $\mathcal{A}(x,y,z,w) = (-x+z+2w, x+2y-z, 2x-2z, 2w)$.
   (a) Linearni transformaciji priredi matriko.
   (b) Poišči jedro in sliko $\mathcal{A}$.
   (c) Poišči lastne vektorje in lastne vrednosti $\mathcal{A}$.
   (d) Poišči taki matriki P in D, kjer je D diagonalna matrika, da bo veljalo $D = P^{-1}AP$.
   (e) $\mathcal{A}$ je podana v standardni bazi. Zapiši ustrezno linearno transfomacijo, ki jo dobiš tako, da $\mathcal{A}$ razpišeš po bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$.
9. Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je glede na bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,-1), (0,-1,0)\}$ in $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ podana z matriko
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Določi eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$ glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_2[x]$ ter za njo določi bazo jedra in bazo slike.
10. Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je podana glede na standardni bazi na naslednji način
$$\mathcal{A}(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 2a_3)x^2 + a_2 x + (2a_3 - a_1).$$
   (a) Natančno utemelji, da je transformacija $\mathcal{A}$ linearna in ji priredi matriko.
   (b) Poišči bazo jedra in bazo slike transformacije $\mathcal{A}$.
   (c) Preveri, da je $\mathcal{C} = \{x^2-1, x, x^2+1\}$ baza ter poišči matriko, ki pripada transformaciji $\mathcal{A}$, če namesto standardne baze $\mathbb{R}_2[x]$ vzamemo le-to
11. Naj bo $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb
$$\begin{aligned} x'' &= 4x + y \\ y' &= 5x' + 1. \end{aligned}$$
12. Poišči rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1' + x_3 \\ x_3' &= -x_2'' + x_2. \end{aligned}$$

13. Poišči splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + e^t \\
x_2' &= 2x_2 + x_3 + t + 1 \\
x_3' &= 2x_3 + 1
\end{aligned}
$$

14. Funkcija $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$
f(x) = \begin{cases} 0 \quad ; & x \leq \pi \\ \pi - x \quad ; & x > \pi \end{cases}.
$$

Razvij funkcijo f v Fourierjevo vrsto po samih kosinusih.

15. Poišči Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$, in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.
$$