

Skupina odda en skupen izvod **pol ure pred testom v kabinetu A-415**.  
Naloge naj bodo

1. reševane na bele ali črtaste A4 liste,
2. reševane zaporedoma,
3. čitljivo zapisane,
4. vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem, ki najdete na <https://www.fkkt.um.si/ukemat/VpisniList.pdf>.

## 1. domača naloga

1. Naj bo  $a$  poljubno realno število. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za poljubno naravno število  $n$  velja

$$\underbrace{\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \dots \sqrt{a^2}}}}_n < |a| + 1.$$

(Koren se ponovi  $n$ -krat.)

2. Reši neenačbo

$$||x - 1| + x| < 2$$

3. V ravnini skiciraj množico točk

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| + 2|x| = 1\}.$$

4. Naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . Poišči vsa kompleksna števila  $z$ , za katere velja  $|z| = 1$  in

$$i(\bar{z} - z^n) = \bar{z} + z^n.$$

Za  $n = 4$  predstavi rešitve v kompleksni ravnini.

5. Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^2 - i\bar{z} = |z - i|.$$

6. Ali je zaporedje  $(a_n)$ , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \left( \frac{n - n^2}{n^2 + 3} \right)^{n^2},$$

omejeno? Utemelji.

7. Zaporedje  $(a_n)$  je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ali je zaporedje  $(a_n)$  monotono? Ali je zaporedje  $(a_n)$  omejeno? Ali je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno? Utemelji!

8. Preuči konvergenco vrst

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 6n + 8},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj njeno vsoto.

9. Poišči vsa realna števila  $x$ , za katera konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(|x|-3)^n}.$$

10. Izračunaj

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - x\pi},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\sin 2x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{6(x-1)},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

11. Funkciji  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x} & ; x \geq 0 \\ 2 \arctan(x) & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x+2} & ; x > 1 \\ 1 + \cos(\pi x) & ; x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Skiciraj grafa funkcij  $f$  in  $g$ .

(b) Preuči injektivnost in surjektivnost funkcij  $f$  in  $g$ .

(c) Določi zalogo vrednosti funkcij  $f$  in  $g$ .

(d) Izračunaj oba kompozituma funkcij  $f$  in  $g$ .

(e) Izračunaj  $\lim_{x \uparrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x-2} + 1}$ .

Opomba: nalogo reši brez uporabe odvoda.

12. Ali obstaja polinom  $p$  druge stopnje, ki poteka skozi točko  $T(1, 1)$ , da bo funkcija  $f$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10^{\sin(2x)+1}-10}{\ln(x^2-x+1)} & ; \quad x < 0 \\ p(x) & ; \quad 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{x^2+7}-4} & ; \quad x > 3, \end{cases}$$

zvezna na množici realnih števil? Če obstaja, ga poišči.

Opomba: nalogo reši brez uporabe odvoda.