

1. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **pol ure pred testom v kabinetu A-415**.
Naloge naj bodo

1. reševane na bele ali črtaste A4 liste,
2. reševane zaporedoma,
3. čitljivo zapisane,
4. vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem, ki najdete na <https://www.fkkt.um.si/ukemat/VpisniList.pdf>.

Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

1. Reši diferencialni enačbi z ločljivima spremenljivkama

$$(a) \quad y' = \frac{\sqrt{1-x}}{y^2 - 2y},$$

$$(b) \quad (x^2 + 4)y' + y^2 = 4.$$

2. Reši homogene diferencialno enačbo

$$xy' = y(1 + (\ln x - \ln y)^2).$$

Poišči še rešitev te enačbe, ki zadošča pogoju $y(1) = e$

3. Reši linearano diferencialno enačbo

$$y' \sin x + y \cos x = \cos 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo

$$y' + 4y \sin(2x) - e^{\cos(2x)} y^{\frac{1}{2}} = 0.$$

5. Reši Riccatijevo diferencialne enačbe

$$y' - 2xy + y^2 = -1 + 3x^2.$$

6. Reši Clairoutovo diferencialno enačbo

$$y = xy' + 2\sqrt{y'}.$$

7. Reši Lagrangeovo diferencialno enačbo

$$xy' + y + (y')^2 = 0.$$

8. Reši naslednje diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti

$$(a) y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5,$$

$$(b) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1},$$

$$(c) 2y''' + 2y' = y'' + y + e^{\frac{x}{2}},$$

$$(d) y^{(iv)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = xe^x,$$

$$(e) y^{(iv)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = xe^{2x},$$

$$(f) y''' - y'' + 2y = e^x \sin x,$$

$$(g) y'''' - 6y''' + 48y'' = 80y' + xe^{2x}.$$

Primer (a) reši na dva načina (s pomočjo variacije konstante in nastavki).

9. Reši diferencialno enačbo

$$y''' - 3y'' + 4y' = -8y - 26e^{-x},$$

pri pogojih $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$ in $y''(0) = 4$.

10. Reši Eulerjevo diferencialno enačbo

$$(a) x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0,$$

$$(b) x^3 y''' + 3x^2 y'' = \ln x.$$

11. Reši diferencialno enačbo

$$y'(e^{-y^2} - 2xy) = 1.$$

12. Reš diferencialno enačbo

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = \frac{1}{x+1}.$$

13. V dvoliterski posodi, ki je zgoraj odprta, je en liter vode. V posodo po cevi dovajamo 36% klorovodikovo kislino s hitrostjo 1 deciliter na minuto. Predpostavimo, da se v vsakem trenutku tekočini dobro premešata in da v primeru, če je posoda polna, višek mešanice odteče iz posode.

V kakšnem času bo v posodi 24% klorovodikova kislina?

14. Zgodil se je umor in policisti potrebujejo pomoč. Med drugim jih zanima čas umora. Imajo podatek, da je temperatura zraka $20^\circ C$, temperatura trupla v trenutku najdbe je bila $28^\circ C$, uro kasneje pa $24^\circ C$. Predpostavimo, da je se telo ohlaja po Newtonovem zakonu segrevanje oziroma ohlajanja in da je običaj na telesna temperatura človeka $36,6^\circ C$.

Ali jim zna? pomagati? Natančneje, kdaj se je zgodil umor?

(Opomba: Newtonov zakon segrevanja oziroma ohlajanja pravi, da se temperatura telesa spreminja tako, da je hitrost spreminjanja temperature sorazmerna razliki temperature med telesom in okolico.)

15. Naj spremenljivka t predstavlja čas, naj bo $P(t)$ populacija v času t in naj bo k koeficient rodnosti/smrtnosti. Nadalje, populacija se v odvisnosti od časa spreminja po zakonu

$$P'(t) = \left(\frac{kt - 1}{t} \right) P(t).$$

- (a) Poišči kako se populacija izraža v odvisnosti od časa.
- (b) Leta 1800 je bila na našem planetu 1 milijarda ljudi, leta 2000 pa 6,1 milijarde ljudi. Izračunaj koliko je bilo ljudi v letu 1, če se populacija spreminja po zgornjem zakonu?