# 2. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **Moodlu**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene skupaj z izpolnjenim obrazcem**, ki je dosegljiv na naslovu

http://www.fkkt.um.si/ukemat/UniMatB.php.

1. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj $A^n$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Za poljubno naravno število $n$ izračunaj $A^n$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži ali ovrzi trditev: Če je $A \neq 0$, tedaj je $A^2 \neq 0$.

4. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Naj bodo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{bmatrix}.$$

6. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

7. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Izračunaj determinanto reda $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

9. V odvisnosti od realnega parametra $a$ reši sistem enačb

$$\begin{aligned} 2ax + y - z &= a \\ 2x - ay + 3z &= 1 \\ 4x + 2y - 2az &= 2. \end{aligned}$$

10. V odvisnosti od realnega parametra $a$ reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + 2y + 2z &= a \\ x + ay - z &= 2 \\ 2x - y + az &= 1. \end{aligned}$$

11. Reši matrično enačbo

$$(-X^T B)^T + AX = I^2,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. V odvisnosti od realnega parametra $a$ reši matričbo enačbo

$$AX = X + B^T,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Poišči bazo vektorskega prostora $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ v $\mathbb{R}^3$ ter določi njeno dimenzijo.

14. Poišči bazo vektorskega prostora $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$ v $M_3(\mathbb{R})$ ter določi njeno dimenzijo.

15. Polinomi so podani s predpisi $p_1(x) = x - 2$, $p_2(x) = 2x + 1$, $p_3(x) = x^2 + 2x$.

    (a) Ali polinomi tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[x]$?

    (b) Polinom $p$, $p(x) = x^2 + 4x - 3$, zapiši kot linearno kombinacijo polinomov $p_1$, $p_2$, $p_3$.

16. Na $\mathbb{R}^2$ vpeljemo produkt

$$< u,\, v >= u^T A\, v,$$

kjer sta $u, v \in \mathbb{R}^2$ in

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da je $\mathbb{R}^2$ s tako definiranim produktom evklidski prostor.

17. Ali je s predpisom

$$< p, q >= \int_0^1 x(p(x) - q(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

kjer sta $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}_n[x]$? Utemelji!

18. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Na vektorski prostor $\mathbb{R}_n[x]$ vpeljemo

$$< p, q >= \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i) q(x_i),$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ paroma različna poljubna realna števila in $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$. Dokaži, da je zgoraj vpeljan produkt skalarni produkt.

19. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Na vektorski prostor $\mathbb{R}_n[x]$ vpeljemo

$$< p, q >= \sum_{i=1}^{n+1} p(x_i)q(x_i),$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ paroma različna poljubna realna števila in $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$.

   (a) Dokaži, da je zgoraj vpeljan produkt skalarni produkt.

   (b) Naj bodo $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Ortogonaliziraj bazo $\mathcal{B} = \{1, x, x^2-1\}$ in zapiši $p(x) = x^2$ s pomočjo izračunane ortogonalne baze.

20. Naj bosta $\mathcal{B} = \{1, x-1, x^2-1, x^3-1, x^4-1\}$ in $\mathcal{C} = \{1, (x-3), (x-3)^2, (x-3)^3, (x-3)^4\}$.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{C}$ baza za $\mathbb{R}_4[x]$.

   (b) Poišči matriko prehoda iz $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.

   (c) Zapiši polinom $p(x) = x^4 - x^3 + 3x - 1$ po bazi $\mathcal{C}$.

21. Dani so vektorji $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (0, 2, 1)$. Preveri, da dani vektorji tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Nadalje, ortogonaliziraj dane vektorje.