3. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **Moodlu**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene skupaj z izpolnjenim obrazcem**, ki je dosegljiv na naslovu

http://www.fkkt.um.si/ukemat/UniMatB.php.

1. Transformacija $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(X) = (\text{sled}(X), x_{11} - 2x_{12}, x_{22}),$$

kjer je $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$.

   (a) Natančno utemelji, da je $\mathcal{A}$ linearna ter poišči bazo jedra in bazo slike.

   (b) Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \right\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

2. Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ je glede na standardni bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$\mathcal{A}(p) = (p(-1), p'(0) - p(0)).$$

   (a) *[5]* Poiš či bazo jedra in bazo slike linearne transformacije $\mathcal{A}$.

   (b) *[10]* Poišči matriko, ki pripada linearni transformaciji $\mathcal{A}$, če vektorska prostora $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathbb{R}^2$ opremimo z bazama $\mathcal{B} = \{1 - x, 1 - x^2, x^2 + x\}$ in $\mathcal{C} = \{(1, 2), (-2, 1)\}$.

3. Dana je linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ki je podana s predpisom $\mathcal{A}(x, y, z, w) = (-x + z + 2w, x + 2y - z, 2x - 2z, 2w)$.

   (a) Linearni transformaciji priredi matriko.

   (b) Poišči jedro in sliko od $\mathcal{A}$.

   (c) Poišči lastne vektorje in lastne vrednosti $\mathcal{A}$.

   (d) Poišči taki matriki P in D, kjer je D diagonalna matrika, da bo veljalo $D = P^{-1}AP$.

(e) $\mathcal{A}$ je podana v standardni bazi. Zapiši ustrezno linearno transfomacijo, ki jo dobiš tako, da $\mathcal{A}$ razpišeš po bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$.

4. Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je podana glede na standardni bazi na naslednji način

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 2a_3)x^2 + a_2 x + (2a_3 - a_1).$$

   (a) Natančno utemelji, da je transformacija $\mathcal{A}$ linearna in ji priredi matriko.

   (b) Poišči bazo jedra in bazo slike transformacije $\mathcal{A}$.

   (c) Preveri, da je $\mathcal{C} = \{x^2 - 1, x, x^2 + 1\}$ baza ter poišči matriko, ki pripada transformaciji $\mathcal{A}$, če namesto standardne baze $\mathbb{R}_2[x]$ vzamemo le-to

5. Poišči rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x' &= x'' + 4y'' \\ y' &= x + y. \end{aligned}$$

pri pogoju $x(0) = y(0) = 1$.

6. Poišči rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1' + x_3 \\ x_3' &= -x_2'' + x_2. \end{aligned}$$

7. Poišči splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + e^t \\ x_2' &= 2x_2 + x_3 + t + 1 \\ x_3' &= 2x_3 + 1 \end{aligned}$$

8. Poišči Fourierjevo vrsto po samih kosinusih za periodično razširitev funkcije $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad ; & x \le \pi \\ \pi - x \quad ; & x > \pi \end{cases}.$$

9. Poišči Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$, in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

10. Razvij funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos(x)|$, v Fourierovo vrste in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n)^2 - 1} - \frac{1}{(4n+2)^2 - 1} \right).$$