2. domača naloga

Skupina odda en skupen izvod **na MS Teams do objavljenega roka**. Naloge naj bodo **zaporedoma in čitljivo rešene na bele liste ter vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem**
http://www.fkkt.um.si/ukemat/UniMatA.php.
Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

1. Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama
$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ in } z = x^2 + (y-R)^2, \text{ kjer je } \quad R > 0.$$
   (a) Skiciraj krivuljo (skupaj s ploskvama).
   (b) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$.
   (c) Izračunaj enačbo tangente v točki $(0, R, 0)$.
   (d) Izračunaj enačbo normalne ravnine v točki $(0, R, 0)$.
2. Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama
$$\mathcal{P}_1 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \text{ in } \mathcal{P}_2 \ : \ z = 1 - y^2.$$
   (a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$ in jo natančno nariši kot presek ploskev.
   (b) Če obstajajo, poišči ekstreme funkcije f, $f(x, y, z) = \frac{yz}{x^2+1}$, če $(x, y, z) \in \mathcal{P}_2$.
3. Zapiši enačbo tangentne ravnine na ploskev $\mathcal{P} : x^2 + y^2 + 1 = -xz$ v tistih točkah, kjer krivulja $\mathcal{K} : r(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 2)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, seka ploskev $\mathcal{P}$.
4. Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Izračunaj
$$\text{rot}(\text{grad} f).$$
5. Izračunaj $\int_{\mathcal{K}} z ds$ po krivulji, podani takole $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
6. Izračunaj površino helikoida, ki je podan parametrično
$$\vec{r}(u, \varphi) = (u \cos \varphi, u \sin varphi, b\varphi),$$
kjer je $0 \leq u \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
7. Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$\vec{F}(x, y, z) = (x, 1, xz^2),$$
skozi ploskev z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v smeri zunanje normale na dva načina:

(a) direktno,

(b) s pomočjo Gaussovega izreka.

8. Ploskev $\mathcal{S}$ je podana takole

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \quad \text{in} \quad z \geq x^2 + y^2,$$

vektorsko polje $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podano s predpisom $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Izračunaj

(a) $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{s}$,

(b) $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{P}$.

9. Telo G v $\mathbb{R}^3$ je določeno z

$$x^2 + y^2 + R^2 z^2 \leq R^2, \quad x^2 + y^2 \leq 3R^2 z^2 \quad \text{in} \quad z \geq \frac{1}{2}, \text{ kjer je } R > 0.$$

Nariši telo G in izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (4x^3 z - y^2, 4y^3 z - z^2, 3R^2 z^4 - x^2),$$

skozi ploskev ∂G v smeri zunanje normale.

10. V vsakem od razdelkov *Krivulje, Ploskve, Krivuljni integral, Ploskovni integral, Gaussov, Stokesov in Greenov izrek* pod nalogami v učbeniku za Metematiko C reši vsaj eno nalogo, ki je še nismo rešili na vajah in niso bile navedene zgoraj

11. Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije f,

$$f(t) = (t + 1)\sin(2t) + t(e^t + \mathrm{ch} t).$$

12. Reši diferencialno enačbo

$$xy''(x) + (4x - 1)y'(x) + (4x - 2)y(x) = 0$$

pri pogoju $y(0) = 0$.

13. Poišči funkcijo $x = x(t)$, za katero bo veljalo

$$x(t) - 2\int_0^t x(u)\sin(t - u)\mathrm{d}u = e^{-t}.$$

14. Poišči rešitev sistema

$$\int_0^t x(s)\mathrm{d}s + x'(t) = 2\cos(t)$$
$$\int_0^t y(s)\mathrm{d}s - x(t) = 0,$$

kjer je $x(0) = 1$.