UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA KEMIJO IN KEMIJSKO TEHNOLOGIJO

Petra Žigert Pleteršek

MATEMATIKA II

Maribor, 2016

Kazalo

Uvod v linearno algebro

V tem poglavju bomo naredili preskok iz matematične analize, s katero smo se do sedaj ukvarjali, v algebro. Spoznali bomo matrike, še posebej nas bo zanimalo, kdaj je matrika regularna, in v ta namen bomo sponali pojem determinante matrike. Nadalje nas bodo zanimali sistemi linearnih enačb in spoznal bomo dva načina za njihovo reševanje.

Motivacija:

Urejanje kemijskih reakcij.

Kodiranje.

1.1 Matrike

V tem razdelku bomo definirali matriko, pogledali računske operacije z matrikami in se v nadaljevanju osredotočili na kvadratne matrike in v zvezi s tem na obratno matriko.

Tabela števil

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

se imenuje *pravokotna matrika*, če je $n \neq m$ in *kvadratna matrika*, če je $n = m$. Števila, ki sestavljajo matriko, so *elementi matrike*. Elementi so lahko realna ali kompleksna števila. V nadaljevanju naj bo $\mathcal{O}$ obseg realnih ali kompleksnih števil.

Za vsak $i = 1, ..., n$ je

$$[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ ...\ \ a_{im}]$$

i-ta vrstica matrike A in za vsak $j = 1, ..., m$ je

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

j-ti stolpec matrike A. Za matriko z n vrsticami in m stolpci pravimo, da je *reda* $n \times m$. Element a_{ij} matrike A pišemo tudi kot

$$a_{ij} = (A)_{ij}\,.$$

Matriki A in B sta enaki natanko tedaj, ko sta enakega reda in imata enake istoležne elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (A)_{ij} = (B)_{ij}$$

za vsak $i = 1, ..., n$ in $j = 1, ..., m$.

Poglejmo, kako računamo z matrikami.

(i) *Seštevanje matrik*

Naj bosta A in B matriki reda $n \times m$. Njuna vsota je matrika $A + B$, pri čemer je

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m\,.$$

Očitno je vsota matrik enakega reda kot oba sumanda, to je $n \times m$.

Zgled 1. *Poiščimo vsoto matrik A in B, če je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Seštevanje matrik je komutativno, saj je seštevanje v obsegu $\mathcal{O}$ komutativno. Velja torej

$$A + B = B + A \tag{1.1}$$

in ker v $\mathcal{O}$ velja tudi asociativnost seštevanja, je seštevanje matrik tudi asociativna operacija

$$A + (B + C) = (A + B) + C\,. \tag{1.2}$$

(ii) *Množenje matrik*

Naj bo A matrika reda $k \times n$, B pa matrika reda $n \times m$. Pomnožimo i-to vrstico matrike A z j-tim stolpcem matrike B na sledeč način:

$$[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,.$$

Dobljeno vsoto imenujemo *skalarni produkt* i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. Produkt matrike A reda $k \times n$ in matrike B reda $n \times m$ označimo AB, pri čemer je

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$$

in gre $i = 1, ..., k$ ter $j = 1, ..., m$. Torej, ij-ti element produkta AB je skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. Produkt AB je torej reda $k \times m$.

Zgled 2. *Matriki iz Zgleda 1 ne moremo množiti zaradi neustreznih redov. Naj bo torej A matrika iz Primera 1, matrika B pa naj bo podana kot*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkt matrik A in B.

Produkt je enak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Iz primera je razvidno, da produkt BA sploh ni definiran. Poglejmo še produkt dveh matrik enakih redov. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tedaj sta definirana oba produkta

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

in

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 17 & 22 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da četudi sta definirana oba produkta, nista (nujno) enaka. Množenje matrik v splošnem ni komutativna operacija

$$AB \neq BA.$$

Velja pa asociativnost množenja

$$A(BC) = (AB)C. \tag{1.3}$$

Lastnost velja iz podobnih razlogov kot pri seštevanju. Je namreč posledica asociativnosti množenja v obsegu $\mathcal{O}$ in definicije množenja matrik. Podrobnosti so prepuščene bralcu.

(iii) *Množenje s skalarjem*

Skalarji so elementi iz obsega $\mathcal{O}$. Matriko A množimo s skalarjem $\lambda \in \mathcal{O}$ tako, da pomnožimo z λ vsak element matrike A

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Bralec naj se sam prepriča, da za množenje s skalarjem veljajo naslednje lastnosti:

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \tag{1.4}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \tag{1.5}$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B \quad \text{in} \tag{1.6}$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A. \tag{1.7}$$

Poleg navedenih lastnosti veljata še obe distributivnost množenja matrik glede na seštevanje

$$A(B + C) = AB + AC \tag{1.8}$$

in

$$(B + C)A = BA + CA. \tag{1.9}$$

Ker morata obstajati tako produkta AB in BA, kot tudi AC in CA, morajo biti matrike A, B, C ustreznih redov. Naj bo A reda $n \times m$, tedaj morata biti matriki B in C obe redov $m \times k$. Rezultat je reda $n \times k$. Preverimo samo lastnost (1.8). Lastnost (1.9) preverimo zelo podobno in to lahko stori bralec sam.

$$\begin{aligned}
(AB+AC)_{ij} &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\
&= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} + \sum_{r=1}^{n} a_{ir}c_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (a_{ir}b_{rj} + a_{ir}c_{rj}) \\
(B+C)_{ij} &= (B)_{ij} + (C)_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \\
(A(B+C))_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}) \\
&= \sum_{r=1}^{n} (a_{ir}b_{rj} + a_{ir}c_{rj})
\end{aligned}$$

Nasprotna matrika, $-A$, matrike A je produkt matrike A s skalarjem -1

$$-A = (-1)A. \tag{1.10}$$

Razlika matrik A in B, $A - B$, je vsota matrike A in nasprotne matrike matrike B

$$A - B = A + (-B)\,.$$

Naj bo A matrika reda $n \times m$. Tedaj je njena *transponirana matrika* A^T matrika reda $m \times n$, ki jo dobimo iz A tako, da zamenjamo vrstice in stolpce:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji},\ \forall\, i = 1, ..., m \quad \text{in} \quad j = 1, ..., n. \tag{1.11}$$

Lema 1.1.

$$(AB)^T = B^T A^T\,.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
(B^T A^T)_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} (B^T)_{ir}(A^T)_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (B)_{ri}(A)_{jr} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (A)_{jr}(B)_{ri} \\
&= (AB)_{ji} \\
&= ((AB)^T)_{ij}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Ničelna matrika O je matrika, ki ima za elemente same ničle

$$\mathrm{O} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Naj bo sedaj A kvadratna matrika ($m = n$). Če ima A n stolpcev oziroma vrstic pravimo, da je *reda* n. Elemente a_{ii}, $i = 1, ..., n$, kvadratne matrike A imenujemo *diagonalni elementi* in sestavljajo *glavno diagonalo* matrike A.

Kvadratna matrika je *zgornje trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i > j$ in pravimo, da je *spodnje trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i < j$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{zgornje trikotna matrika}\,,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{spodnje trikotna matrika}\,.$$

Matrika, ki je zgornje in obenem tudi spodnje trikotna, je *diagonalna matrika*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{diagonalna matrika}\,,$$

Diagonalna matrika, za katero je $a_{ii} = 1$ za vsak i, je *enotska matrika* I:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{enotska matrika}\,.$$

Bralec naj sam preveri, da za vsako kvadratno matriko A velja

$$IA = AI = A. \tag{1.13}$$

To pomeni, da je enotska matrika I enota za množenje v množici matrik.

Sled matrike A, $\mathrm{sl}(A)$, je vsota njenih diagonalnih elementov. Ni težko videti, da velja

$$\mathrm{sl}(A+B) = slA + slB\,.$$

Kvadratna matrika A je *simetrična*, če je enaka svoji transponirani matriki

$$A^T = A\,.$$

Kvadratna matrika je *antisimetrična* ali *poševno simetrična*, če je enaka svoji negativni transponirani matriki

$$A = -A^T\,.$$

Naj bo sedaj A matrika z elementi iz $\mathbb{C}$. Njej *konjugirano matriko*, $\overline{A}$, dobimo tako, da poiščemo konjugirano vrednost vsakega elementa. Kompleksni matriki A *adjungirano matriko*, A^*, dobimo tako, da transponiramo konjugirano kompleksno matriko

$$A^* = (\overline{A})^T\,.$$

Kvadratna matrika je *hermitska* ali *sebi adjungirana*, ko je enaka svoji adjungirani matriki

$$A = A^* = (\overline{A})^T\,.$$

Kvadratna matrika je *poševno hermitska* ali *antihermitska*, če je enaka svoji negativni adjungirani matriki

$$A = -A^* = -(\overline{A})^T\,.$$

Za realne matrike sovpadata pojma simetrična in hermitska matrika ter antisimetrična in antihermitska matrika.

Naj bo $\mathcal{M}_n = \{A; A\,\mathrm{reda}\,n,\ (A)_{ij} \in \mathcal{O}\}$. Poglejmo kakšno algebrsko strukturo tvorijo kvadratne matrike.

Izrek 1.2. $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ *je kolobar z enoto.*

Dokaz.

1. $(\mathcal{M}_n, +)$ je Abelova grupa:

   1.1 operacija seštevanja matrik reda n je binarna operacija,

   1.2 $A + (B + C) = (A + B) + C$ velja zaradi (1.2),

   1.3 $\exists\, O : A + O = O + A = A$ velja zaradi (1.12)

   1.4 $\forall A\,,\ \exists -A :\ A + (-A) = (-A) + A = 0$ velja zaradi (1.10), 1.5 $A + B = B + A$ velja zaradi (1.1).

2. Množenje je asociativna operacija

$$(AB)C = A(BC)\,,$$

kar smo pokazali v (1.3).

3. Distributivnost množenja glede na seštevanje:

$$A(B + C) = AB + AC \text{ velja zaradi } (1.8),$$
$$(B + C)A = BA + CA \text{ velja zaradi } (1.9)\,.$$

4. Enota za množenje je enotska matrika.

$\blacksquare$

V nadaljevanju bomo definirali pomemben pojem v zvezi s kvadratnimi matrikami in sicer je to obratna matrika.

Definicija 1.3. *Matrika B je* obratna *ali* inverzna matrika *matrike A, če velja*

$$AB = BA = I\,.$$

Obratno matriko matrike A označimo z A^{-1}.

Zgled 3. *Poiščimo obratno matriko matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\,.$$

Naj bo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\,.$$

Veljati mora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ & \\ -a+2c & -b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a+c=1$$

$$b+d=0$$

$$-a-c=1$$

$$-b-2d=0$$

$$c = d = -b = \frac{1}{3},\ a = \frac{2}{3}\,.$$

Torej je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ & \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izrek 1.4. *Če obstaja obratna matrika matrike A, je le-ta enolično določena.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, recimo da obstajata dve različni obratni matriki B in C matrike A. Tedaj velja

$$AB = BA = I$$

in

$$AC = CA = I\,.$$

Tedaj velja

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C\,,$$

kar je v protislovju z $B \neq C$. ∎

Definicija 1.5. *Matrika je* obrnljiva*, če obstaja njej obratna matrika.*

Obrnljivim matrikam pravimo tudi *regularne matrike.*

Izrek 1.6. *Množica vseh obrnljivih matrik reda n je grupa za množenje obrnljivih matrik.*

Dokaz. Preveriti moramo lastnosti grupe za operacijo množenja.

1. Pokazati moramo, da je množenje obrnljivih matrik reda n binarna operacija. To pomeni, da je produkt obrnljivih matrik spet obrnljiva matrika. Naj bosta torej A in B poljubni obrnljivi matriki in $AB = C$. Pokazati moramo, da obstaja C^{-1}. Izračunajmo:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AIA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I\,.\end{aligned}$$

   Pokazali smo torej, da velja

$$C(B^{-1}A^{-1}) = I\,,$$

   kar pomeni, da je obratna matrika matrike C enaka

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

   Preostale tri lastnosti smo že preverili ali pa sledijo neposredno iz definicije:

2. $(AB)C = A(BC)$ velja zaradi (1.3),
3. $\exists I : AI = IA = A$ velja zaradi (1.13)
4. $\forall A, \exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I$ sledi iz Definicije 1.3.

∎

Iz dokaza izreka je razvidna naslednja posledica.

Posledica 1.7.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

1.2 Računanje determinante matrike

O sami definiciji determinanti ne bomo veliko povedali. Poudarek bo na izračunavanju determinante. Uporabljali jo bomo pri izračunu obratne matrike in pri reševanju sistemov linearnih enačb. Definicija determinante, ki jo bomo podali v tem razdelku, je kar se da poenostavljena. Formalno je determinanta matrike definirana preko permutacij, mi se bomo zadovoljili s tem, da je determinanta število, ki ga lahko priredimo vsaki kvadratni matriki. Induktivno bomo vpeljali determinanto kvadratne matrike A, ki jo označimo $\det(A)$ in jo pišemo podobno kot samo matriko, le da namesto oglatih oklepajev uporabimo ravne črte.

Determinanta matrike A reda dva je definirana kot produkt elementov glavne diagonale, od katerih odštejemo produkt preostalih elementov:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Zgled 4. *Izračunajmo determinanto matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 = 9\,.$$

Determinanta matrike reda tri je definirana kot:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})\,.$$

Do determinante matrike reda tri pridemo preko determinant matrik reda dva in sicer tako, da determinanto večje matrike razvijemo po vrstici ali stolpcu na vsoto determinant matrik za ena nižjega reda. Pri tem determinanto matrike nižjega reda imenujemo *poddeterminanta*. Poglejmo si razvoj po prvi vrstici:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{poddet.}|A_{11}|} + (-1)^{1+2}a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{poddet.}|A_{12}|} + (-1)^{1+3}a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\text{poddet.}\,|A_{13}|}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\,.$$

Poddeterminanto $|A_{ij}|$ dobimo tako, da v determinanti matrike A prečrtamo in zanemarimo celotno i-to vrstico in j-ti stolpec. To, kar ostane, je poddeterminanta $|A_{ij}|$.

Zgled 5. *Izračunajmo determinanto matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 12\,. \end{aligned}$$

Zaenkrat smo determinanto matrike A reda tri računali z razvojem po prvi vrstici in sicer preko poddeterminant $|A_{ij}|$, kjer je $j = 1, 2, 3$. Toda determinanto matrike A bi lahko računali s pomočjo razvoja po katerikoli vrstici ali stolpcu. Predznak poddeterminante $|A_{ij}|$ določa predznak $(-1)^{i+j}$.

Tako bi lahko determinanto iz Primera 5 na drugačen način izračunali s pomočjo razvoja po, na primer, tretjem stolpcu, kar vidimo na Primeru 6.

Zgled 6. *Izračunajmo determinanto matrike A iz Primera 5 s pomočja razvoja po tretjem stolpcu.*

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-2)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 12\,.
\end{aligned}$$

Za izračun determinante matrike tretjega reda lahko uporabimo *Sarrusovo pravilo*, ki temelji na naslednji shemi:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Induktivno postopek računanja determinante matrik reda dva in tri lahko posplošimo na računanje determinante kvadratne matrike poljubnega reda. Naj bo torej A kvadratna matrika reda n. Če determinanto matrike A izračunamo z razvojem po i-ti vrstici, (i je poljubno število med 1 in n), tedaj za vsak $r = 1, 2, ..., n$ element a_{ir} pomnožimo s pripadajočo poddeterminanto $|A_{ir}|$, katere predznak je določen z $(-1)^{i+r}$. Determinanta matrike A je definirana kot vsota produktov elementov i-te vrstice s pripadajočimi poddeterminantami:

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} |A_{ir}|\,.$$

Podobno lahko determinanto matrike A izračunamo s pomočjo razvoja po j-tem stolpcu

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{rj} |A_{rj}|\,.$$

Za izračun determinante je najugodnejši izbor vrstice ali stolpca s čim večjim številom ničel, saj ti členi odpadejo iz vsote. Sarrusovo pravilo se lahko uporabi izključno pri matrikah reda tri.

Opazimo, da je determinanta trikotnih in diagonalnih matrik enaka produktu diagonalnih elementov.

Navedimo nekaj lastnosti determinante. Ker smo se pri vpeljavi determinante izognili formalni definiciji le-te, lastnosti ne moremo izpeljati, ampak jih bomo samo navedli:

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) $\det(A) = \det(A^T)$.

(iii) Če imajo v matriki v poljubni vrstici (stolpcu) vsi elementi skupen faktor, lahko le-tega izpostavimo iz determinante.

(vi) Če ima matrika kakšno ničelno vrstico (stolpec), je determinanta enaka nič.

(v) Če v matriki med seboj zamenjamo dve vrstici (stolpca), se spremeni predznak determinante.

(vi) Če vrstici prištejemo (odštejemo) večkratnik katere druge vrstice (stolpca), se vrednost determinante ne spremeni.

(vii) Če sta v matriki dve vrstici (stolpca) enaki ali je ena večkratnik druge, je determinanta matrike enaka 0.

.

Definicija 1.8. *Matrika $\widehat{A}$ je* prirejenka *matrike A, če je*

$$(\widehat{A})_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|\,.$$

Zgled 7. *Izračunajmo prirejenko $\widehat{A}$ matrike A iz Primera 4 ter izračunaj $A\widehat{A}$.*

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

in

$$A\widehat{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = det(A)I\,.$$

V nadaljevanju pokažimo lemo, ki bo potrebna v dokazu naslednjega izreka.

Lema 1.9. *Za $j \neq i$ je*

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{j+r}a_{ir}|A_{jr}| = 0\,.$$

Dokaz. Naj bo A matrika z elementi a_{ij}. Matriki A priredimo matriko A' z elementi ${a'}_{ij}$ tako, da v matriki A namesto j-te vrstice napišemo i-to vrstico, ostalih vrstic pa ne spreminjamo. S tem ima matrika A' dve enaki vrstici in je njena determinanta enaka 0. Zapišimo determinanto matrike A' z razvojem po j-ti vrstici:

$$0 = \det(A') = \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{j+r}a'_{jr}|A'_{jr}| = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{j+r}a_{ir}|A_{jr}|\,.$$

∎

Izrek 1.10. *Matrika A je* obrnljiva *natanko tedaj, ko je* $\det(A) \neq 0$.

Dokaz. Izpeljimo dokaz v obe smeri.

($\Rightarrow$) Naj bo A obrnljiva, torej naj obstaja A^{-1}. Tedaj je $AA^{-1} = I$ in velja

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I) \\ &= \det(AA^{-1}) \\ &= \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A) \neq 0\,. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Naj bo sedaj $\det(A) \neq 0$. Pokažimo, da velja

$$A\widehat{A} = \det(A)I\,,$$

kar pomeni, da moramo pokazati:

$$\begin{aligned} (A\widehat{A})_{ii} &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(\widehat{A})_{ri} \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(-1)^{r+i}|A_{ir}| \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+i}a_{ir}|A_{ir}| \\ &= \det(\mathrm{A})\,. \end{aligned}$$

in za $i \neq j$ imamo

$$\begin{aligned} (A\widehat{A})_{ij} &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(\widehat{A})_{rj} \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(-1)^{r+j}|A_{jr}| \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+j}a_{ir}|A_{jr}| \\ &\underbrace{=}_{\textit{Lema}\ 1.9} 0\,. \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(A)}A\widehat{A} &= I \quad \text{ali} \\ A\left(\frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\right) &= I \end{aligned}$$

od koder sledi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\,.$$

∎

Iz dokaza Izreka 1.10 neposredno sledi posledica.

Posledica 1.11. *Če je A obrnljiva, tedaj je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \widehat{A}\,.$$

Obrnljivim matrikam pravimo tudi *regularne matrike*. V nasprotnem je matrika *singularna*.

Zgled 8. *Izračunajmo obratno matriko matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanto izračunamo z razvojem po prvem stolpcu:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo elemente prirejenke:

$$(\widehat{A})_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad (\widehat{A})_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad (\widehat{A})_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$(\widehat{A})_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad (\widehat{A})_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad (\widehat{A})_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$(\widehat{A})_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad (\widehat{A})_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad (\widehat{A})_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\,.$$

Zato je prirejenka enaka

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \\ 8 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

in obratna matrika je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Zgled 9. *Izračunajmo obratno matriko matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Njena prirejenka je

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 9 & -6 & 4 \\ 12 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

in ker je $\det(A) = 1$, je $A^{-1} = \widehat{A}$.

1.3 Sistemi linearnih enačb

Cilj tega razdelka je sistematično reševanje sistemov linearnih enačb. Linearne enačbe so tiste, v katerih neznanke nastopajo samo v prvi potenci, na primer:

$$2x - 5 = 0,\ 2x + 3y = 0,\ 3y = 2z \ldots$$

Spoznali bomo dva načina reševanja sistemov linearnih enačb in sicer Gaussovo eliminacijsko metodo in Cramerjevo pravilo. Kot poseben primer Gausove eliminacije bomo pogledali še tretji način za izračun obratne matrike.

Za motivacijo rešimo naslednje sisteme dveh enačb z dvema neznankama.

1.
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$
$$x = 1, y = 1\,.$$
Dobili smo enolično rešitev.

2.
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2 + 2y &= 4 \end{aligned}$$
$$x + y = 2\,.$$
Dobili smo neskončno rešitev oziroma enoparametrično rešitev (vse točke na premici $y = -x + 2$).

3.
$$
\begin{aligned}
x + y &= 2 \\
2x + 2y &= 5 \\
\\
0 &= 1\,.
\end{aligned}
$$

V tem primeru ni rešitve.

Opazimo, da lahko pri sistemih linearnih enačb pričakujemo tri različne izide:

(i) enolična rešitev,

(ii) neskončno rešitev,

(iii) ni rešitve.

V splošnem bomo reševali sistem m linearnih enačb z n neznankami:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,.
\end{array}
$$

Pri tem so a_{ij} in b_i, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, znani elementi iz obsega realnih ali kompleksnih števil, $x_1, x_2, ..., x_n$ pa iskane neznanke.
Če vpeljemo

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},
$$

lahko sistem m linearnih enačb z n neznankami v matrični obliki zapišemo kot

$$
Ax = b\,.
$$

Definicija 1.12. *Sistema linearnih enačb sta* ekvivalentna*, kadar sta njuni množici rešitev enaki.*

Zgled 10. *Dana sta sistema linearnih enačn*

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= -1 \\
-x_1 + x_2 &= 5 \\
x_2 + 2x_2 &= 4
\end{aligned}
\qquad in \qquad
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 &= -9 \\
-x_1 + 4x_2 &= 10\,.
\end{aligned}
$$

Oba sistema imata rešitev $x_1 = -2, x_2 = 3$, zato sta ekvivalentna.

Spoznali bomo dva načina reševanja linearnih sistemov:

(i) Gaussovo eliminacijsko metodo in

(ii) Cramerjevo pravilo (uporabno le, ko je $n = m$ in je sistem enolično rešljiv).

Poglejmo si posamezno metodo.

(i) *Gaussova eliminacijska metoda*

Naj bo $[A, b]$ razširjena matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da ji na desni strani dodamo stolpec vrednosti b:

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Naš cilj je transformirati razširjeno matriko $[A, b]$ tako, da bo njena desna stran, to je matrika A, zgornje trikotna matrika. Taki obliki matrike pravimo *stopničasta oblika.* V ta namen lahko uporabljamo osnovne transformacije, ki ne spremenijo rešitev sistema linearnih enačb. Ta postopek imenujemo *Gaussova eliminacijska metoda.*

Osnovne vrstične transformacije so:

(i) zamenjava dveh vrstic $V_i \leftrightarrow V_j$,

(ii) poljubno vrstico pomnožimo z neničelnim realnim številom $c\,V_i$,

(iii) poljubni vrstici prištejemo neničelni večkratnik druge vrstice $V_i + c\,V_j$, $i \neq j$.

Izrek 1.13. *Osnovne vrstične transformacije prevedejo začetni sistem linearnih enačb na ekvivalenten sistem linearnih enačb.*

Dokaz. Naj bo $Ax = b$ dani sistem linearnih enačb in $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ neprazna množica rešitev tega sistema. Prvi dve transformaciji očitno ne spremenita množice rešitev , zato si poglejmo samo tretjo, $V_i + c\,V_j$, ko i-ti vrstici prištejemo neničelni večkratnik j-te vrstice. Po tej transformaciji je i-ta vrstica enaka

$$(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + (a_{i2} + ca_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = b_i + cb_j$$

in naj bo S^* množica rešitev tega transformiranega sistema linearnih enačb. Pokazati moramo, da je $S = S^*$.

$S \subseteq S^*$: Ker je S množica rešitev začetnega sistema linearnih enačb, velja

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n = b_i$$

in

$$a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \cdots + a_{jn}u_n = b_j\,.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} b_i + cb_j &= (a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n) + c(a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n) \\ &= (a_{i1} + ca_{j1})u_1 + (a_{i2} + ca_{j2})u_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})u_n\,, \end{aligned}$$

s čimer smo dokazali inkluzijo v eno smer.

$S^* \subseteq S$: Naj bo zdaj $S^* = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ neprazna množica rešitev transformiranega sistema linearnih enačb, torej je i-ta vrstica

$$(a_{i1} + ca_{j1})w_1 + (a_{i2} + ca_{j2})w_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})w_n = b_i + cb_j\,,$$

vse ostale pa so enake kot v začetnem sistemu. Tedaj je

$$\begin{aligned} b_i + cb_j &= (a_{i1} + ca_{j1})w_1 + (a_{i2} + ca_{j2})w_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{jn})w_n \\ &= a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n + c(a_{j1}w_1 + a_{j2}w_2 + \cdots + a_{jn}w_n)\,. \end{aligned}$$

Ker je

$$b_j = a_{j1}w_1 + a_{j2}w_2 + \cdots + a_{jn}w_n\,,$$

mora biti

$$b_i = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n\,.$$

kar pomeni, da je S^* rešitev začetnega sistema linearnih enačb.

Premislimo še, kaj velja, če $Ax = b$ nima rešitve. Če je $S = \emptyset$, je tudi $S^* = \emptyset$, saj bi v nasprotnem, podobno kot zgoraj, pokazali, da je S^* rešitev začetnega sistema linearnih enačb, s čimer bi prišli v protislovje s tem, da je S prazna množica. ∎

Poleg osnovnih vrstičnih transformacij poznamo še *osnovne stolpične transformacije*, vendar lahko za reševanje sistemov linearnih enačb uporabljamo samo zamenjavo stolpcev, $S_i \leftrightarrow S_j$. Pri tej transformaciji moramo biti pozorni na spremembo vrstnega reda neznank.

Z osnovnimi transformacijami naredimo stopničasto obliko razširjene matrike $[A, b]$:

$$[A,b] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right].$$

Sedaj ločimo dve vrsti neznank in sicer so

$$x_1, x_2, ..., x_r$$

vezane neznanke in

$$x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$$

so *proste neznanke.*

Sistem linearnih enačb ima rešitev le v primeru, ko je

$$b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0\,.$$

V tem primeru lahko zadnjih $m - r$ ničelnih vrstic zanemarimo. Rešitev dobimo tako, da vezane neznanke izrazimo s prostimi in pravimo, da smo dobili $(n - r)$-parametrično rešitev sistema. Če je $n = r$, tedaj dobimo enolično rešitev sistema linearnih enačb.

Zgled 11. *Rešimo sistem linearnih enačb*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & + & 3\,x_5 & = & 13 \\ & & & & x_3 & - & 3\,x_4 & + & 6\,x_5 & = & 5 \\ & & & & & - & x_4 & + & x_5 & = & -1\,. \end{array}$$

Če izvedemo osnovno stolpčno transformacijo in damo prvi stolpec na zadnje mesto, že imamo stopničasto obliko:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & + & 3\,x_5 & + & x_1 & = & 13 \\ & & x_3 & - & 3\,x_4 & + & 6\,x_5 & & & = & 5 \\ & & & - & x_4 & + & x_5 & & & = & -1\,. \end{array}$$

Torej sta x_1 in x_5 prosti spremenljivki, preostale so vezane in jih izrazimo s prostima. Naj bo $x_1 = t$ in $x_5 = s$. Tedaj lahko rešitev zapišemo kot

$$x = \begin{bmatrix} t \\ 3 - t - 2s \\ 8 - 3s \\ 1 + s \\ s \end{bmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Definicija 1.14. *Rang matrike A, rang(A), je število neničelnih vrstic po končani Gaussovi eliminaciji.*

Zgled 12. *Poiščimo rang matrike, ki pripada sistemu linearnih enačb iz Primera 11.*

Stopničasta oblika matrike A, ki pripada temu sistemu, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je

$$\mathrm{rang}(A) = 3\,.$$

Vrsto rešitev sistema linearnih enačb glede na rang pripadajoče matrike podaja naslednji izrek.

Izrek 1.15. *Naj bo $A\,x = b$ sistem m linearnih enačb z n neznankami in $[A, b]$ pripadajoča razširjena matrika. Tedaj velja:*

(i) *če je rang(A) = rang$([A, b]) = n$, ima sistem linearnih enačb enolično rešitev,*

(ii) *če je rang$(A) \neq$ rang$([A, b])$, sistem linearnih enačb nima rešitve,*

(iii) *če je rang(A) = rang$([A, b]) = r < n$, tedaj ima sistem linearnih enačb $(n - r)$ -parametrično rešitev.*

Dokaz. Vse tri trditve so enostavne za preveriti in naj jih bralec za vajo sam naredi. ∎

V primeru enolične rešitve sistema linearnih enačb lahko z Gaussovo eliminacijo dosežemo *normalizirano diagonalno obliko* matrike A. To pomeni, da izvajamo osnovne transformacije najprej pod diagonalo in nato nad diagonalo, dokler ni leva stran razširjene matrike $[A, b]$ enotska matrika reda n:

$$[A,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n' \end{array}\right].$$

Desni stolpec je potemtakem rešitev sistema.

Zgled 13. *Rešimo sistem*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2\,. \end{array}$$

$$\begin{aligned} [A,b] &= \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \\ &\approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \\ &\approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Tako je rešitev

$$x = \left[\begin{array}{r} 6 \\ -1 \\ -3 \end{array}\right].$$

Do sedaj smo obratno matriko izračunali direktno preko sistema linearnih enačb in s pomočjo prirejenke, poznamo pa še tretji način, ki je posledica Gaussove eliminacije.

Matriki A priredimo razširjeno matriko $[A, I]$ tako, da na desno stran napišemo enotsko matriko enakega reda:

$$[A,I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Najprej s pomočjo osnovnih vrstičnih transformacij predelamo prvi stolpec v tako obliko, da je v prvi vrstici 1, v vseh ostalih pa 0:

$$[A,I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Ostali elementi se zaradi vrstičnih transformacij spreminjajo, zato so označni z zvezdicami. Nato v drugem stolpcu naredimo na diagonali 1, in pod diagonalo 0:

$$[A,I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Postopek ponovimo za vsak stolpec tako, da imamo na diagonali 1, pod diagonalo pa 0. Po kvečjemu n korakih pridelamo matriko:

$$[A,I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Sedaj vse skupaj ponovimo nad glavno diagonalo. Najprej v zadnjem stolpcu naredimo ničle nad diagonalo, kjer je enica:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & * & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Postopek ponovimo za vse stolpce od zadaj naprej in po kvečjemu $n-1$ korakih ima razširjena matrika obliko:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Matrika, ki smo jo dobili na desni strani, je obratna matrika A^{-1}. Če se zgodi, da tekom transformacij naletimo na ničelno vrstico ali stolpec, postopka ne moremo nadaljevati in obratna matrika ne obstaja.

Poglejmo na celoten postopek s stališča $n \times n$ sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n \\ \vdots \qquad &= \qquad \vdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_n + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 1 \cdot b_n \\ Ax \qquad &= \qquad Ix\,. \end{aligned}$$

Izvedemo Gaussov eliminacijski postopek do normalizirane diagonalne oblike:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n &= a_{11}^* b_1 + a_{12}^* b_2 + \cdots + a_{1n}^* b_n \\ x_2 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n &= a_{21}^* b_1 + a_{22}^* b_2 + \cdots + a_{2n}^* b_n \\ \vdots \qquad &= \qquad \vdots \\ 0 \cdot x_n + 0 \cdot x_n + \cdots + 1 \cdot x_n &= a_{n1}^* b_1 + a_{n2}^* b_2 + \cdots + a_{nn}^* b_n \\ Ix \qquad &= \qquad A^* b\,. \end{aligned}$$

Ker je $Ix = x = A^{-1}b$, je A^* obratna oz. inverzna matrika od A.

Zgled 14. *Izračunajmo obratno matriko matrike A iz Primera 9 s pomočjo razširjene matrike $[A, I]$.*

$$
\begin{aligned}
[A,I] &= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \\
&\approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -8 & 5 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 23 & -15 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -8 & 5 \end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -8 & 5 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

(ii) Cramerjevo pravilo

Uporabimo ga lahko samo za reševanje enolično rešljivih sistemov n linearnih enačb z n neznankami (sistem reda n).

Izrek 1.16. *Sistem $Ax = b$ je enolično rešljiv natanko tedaj, ko je* $\det(A) \neq 0$*. Rešitev sistema se izraža kot*

$$
x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \; i = 1, 2, ..., n\,.
$$

Dokaz.

Ker je po Izreku 1.10 determinanta matrike A različna od 0 natanko tedaj, ko je A obrnljiva, že imamo enolično rešitev sistema:

$$x = A^{-1}\, b\,.$$

Pokažimo še, kako se izraža rešitev x sistema $Ax = b$.

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\, b = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \dots & \widehat{a}_{1n} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \dots & \widehat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{a}_{n1} & \widehat{a}_{n2} & \dots & \widehat{a}_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Vemo, da so elementi prirejenke $\widehat{A}$ enaki

$$\widehat{a}_{ir} = (-1)^{i+r}|A_{ri}|\,.$$

Poglejmo i-to komponento rešitve x:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\sum_{r=1}^{n}\widehat{a}_{ir}b_r = \frac{1}{\det(A)}\underbrace{\sum_{r=1}^{n}(-1)^{i+r}b_r|A_{ri}|}_{\text{razvoj po } i\text{–ti vrstici}}\,,$$

kar je ravno determinanta matrike iz izreka. ∎

Zgled 15. *Rešimo sistem*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

Najprej moramo izračunati

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1\,.$$

Izračunajmo x_1:

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6\,.$$

Na podoben način izračunamo $x_2 = -1$ in $x_3 = -3$.

Poseben primer sistemov so *homogeni sistemi linearnih enačb*

$$A\,x = 0\,.$$

A in x sta enaka kot prej, 0 pa je stolpec s samimi ničlami.

Primer homogenega sistema je

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 8\,x_4 & = & 0 \\ 9\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & 11\,x_3 & + & 12\,x_4 & = & 0 \\ -\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & 0\,. \end{array}$$

Opazimo, da ima vsak homogeni sistem ničelno rešitev $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Tej rešitvi pravimo *trivialna rešitev* homogenega sistema linearnih enačb.

Izrek 1.17. *Homogeni sistem linearnih enačb reda n je netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je* $\det(A) = 0$.

Dokaz. Izrek 1.16 (Cramerjevo pravilo) pravi, da je sistem $A\,x = 0$ enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Ker je trivialna rešitev vedno rešitev homogenega sistema linearnih enačb, v primeru, ko je $\det(A) \neq 0$ nimamo nobene druge rešitve. Torej, če želimo netrivialno rešitev, mora biti $\det(A) = 0$. ∎

Zgled 16. *Poiščimo rešitve zgoraj zapisanega homogenega sistema linearnih enačb.*

Zapišimo sistem v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

S postopkom Gaussove eliminacije dobimo stopničasto razširjeno matriko (podrobnosti so prepuščene bralcu):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev sistema je $x_2 = -2\,x_3 - 3\,x_4$ in $x_1 = x_3 + 2x_4$. Naj bo $x_3 = s$ in $x_4 = t$, kjer sta $s, t \in \mathbb{R}$. Tedaj je rešitev homogenega sistema vsak vektor oblike

$$\begin{bmatrix} s + 2\,t \\ -2\,s - 3\,t \\ s \\ t \end{bmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Vidimo, da smo dobili netrivialno rešitev in bralec naj sam preveri, da je $\det(A) = 0$.

Integralni račun

2.1 Nedoločeni integral

V prejšnjem poglavju smo dani funkciji f poiskali odvod f' ali diferencial $df = f'(x)\,dx$. Sedaj pa nas zanima obratno - kako dobiti iz znanega odvoda prvotno funkcijo.

Motivacija:
Hitrost je enaka spremembi poti po času

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)\,.$$

Kako bi dobili $s(t)$? Naredimo obratno računsko operacijo in pravimo, da je $s(t)$ nedoločeni integral od $v(t)$.

2.1.1 Definicija nedoločenega integrala in pravila za integriranje

Definicija 2.1. *Naj bo znana funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija F, za katero v vsaki točki iz D velja*

$$F'(x) = f(x)$$

se imenuje nedoločeni integral *funkcije f.*

Nedoločeni integral funkcije f označimo

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Operacija, s katero poiščemo funkciji f njen nedoločeni integral, je *nedoločeno integriranje* funkcije f, simbol $\int$ je *integracijski znak*, f je *integrand*, diferencial $f(x)\,dx$ pa je *izraz pod integracijskim znakom.*

Zgled 17. *Poišči funkcijo $F(x)$, če je $F'(x) = \frac{1}{x}$.*

$$F'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x \,\vee\, F(x) = \ln x - 5 \,\vee\, F(x) = \ln x + 100 \,\vee\, \ldots$$

Izrek 2.2. *Če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$, je njen nedoločeni integral tudi funkcija $F(x) + C$, kjer je C poljubna konstanta. Vsak nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je oblike $F(x) + C$.*

Dokaz. Ker je $F'(x) = f(x)$, je tudi $[F(x) + C]' = f(x)$. Torej je prvi del izreka dokazan.

Za dokaz drugega dela izreka naj bo $G(x)$ poljuben nedoločeni integral funkcije $f(x)$, torej naj velja $G'(x) = f(x)$. Pokazati moramo, da je $G(x) = F(x) + C$. Velja

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0\,.$$

Po posledici Lagrangeovega izreka je tedaj

$$G(x) - F(x) = C$$

oziroma

$$G(x) = F(x) + C\,.$$

∎

Izrek pove, da če poznamo odvod funkcije, ne poznamo natančno same funkcije, ampak je ta znana do aditivne konstante natančno. Od tod izvira ime nedoločeni integral. Konstanta C v izreku 2.2 se imenuje *integracijska konstanta.* Zato bomo nedoločeni integral funkcije $f(x)$ pisali

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

kjer velja $F'(x) = f(x)$ in je C poljubna konstanta.

Zgled 18. *Poišči nedoločeni integral* $\int \sin x\,dx$.

$$f(x) = \sin x = F'(x) \Leftrightarrow F(x) = -\cos x + C\,.$$

Na podoben način lahko iz tabele odvodov elementarnih funkcij dobimo tabelo osnovnih integralov:

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{asin}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{atan}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$$

Pri tem je C poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$.

O veljavnosti formul se prepričamo tako, da z odvajanjem funkcije na desni strani dobimo integrand na levi strani. Izpeljimo nekatere:

1. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{atan}\frac{x}{a} + C\,.$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a}+C\right)' &= \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)'+0\\ &= \frac{1}{a^2}\frac{a^2}{x^2+a^2}\\ &= \frac{1}{x^2+a^2}\,.\end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

   Najprej ugotovimo, da je funkcija $\sqrt{x^2-a^2}$ definirana za $|x|>|a|$.

$$\begin{aligned}\left(\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\right)' &= \begin{cases}\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C\right)' & ;\ x+\sqrt{x^2-a^2}>0\\ \left(\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C\right)' & ;\ x+\sqrt{x^2-a^2}<0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}} & ;\ x+\sqrt{x^2-a^2}>0\\ \dfrac{\left(-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)}{-x-\sqrt{x^2-a^2}} & ;\ x+\sqrt{x^2-a^2}<0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} & ;\ x+\sqrt{x^2-a^2}>0\\ \dfrac{-1}{-x-\sqrt{x^2-a^2}}\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} & ;\ x+\sqrt{x^2-a^2}<0\end{cases}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.\end{aligned}$$

2.1.2 Pravila za integriranje

Le-ta izpeljemo iz ustreznih pravil za odvajanje.

Izrek 2.3. *Integral vsote dveh funkcij je vsota integralov obeh členov:*

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Naj bo $F_1(x) = \int f_1(x)\,dx$ in $F_2(x) = \int f_2(x)\,dx$. Ker je po definiciji nedoločenega integrala $F_i'(x) = f_i(x)$, $i = 1, 2$, od tod sledi

$$[F_1(x) + F_2(x)]' = f_1(x) + f_2(x)$$

oziroma

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = F_1(x) + F_2(x) = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\,.$$

■

Pravilo lahko posplošimo na poljubno število členov

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx\,.$$

Izrek 2.4. *Če je funkcija pod integralskim znakom pomnožena z neničelno konstanto, smemo le-to nesti pred integralski znak*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Tedaj je

$$[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$$

in integral funkcije $kf(x)$ je enak

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) = k\int f(x)\,dx\,.$$

■

Iz Izrekov 2.3 in 2.4 neposredno sledi naslednja posledica.

Posledica 2.5.

$$\int [f_1(x) - f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx\,.$$

Tudi razliko lahko posplošimo na več členov

$$\int [f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx - \cdots - \int f_n(x)\,dx\,.$$

Zgled 19. *1.* $\int \operatorname{sh} x\,dx$

2. $\int \mathrm{ch} x \, dx$

Izrek 2.6. (Uvedba nove spremenljivke)
Naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral, obstaja tudi nedoločeni inegral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in velja

$$\int f(x)\, dx = \int f(x(t))x'(t)\, dt\,.$$

Dokaz. Naj ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral $F(x)$, torej

$$\int f(x)\, dx = F(x)\,.$$

Če v F postavimo $x = x(t)$, dobimo novo funkcijo $G(t) = F(x(t))$. Po pravilu za verižno odvajanje velja

$$G'(t) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)\,,$$

torej res obstaja integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in je enak zvezi iz izreka. ∎

Zgled 20. *1.* $\int e^{5x+3}\,dx$

Izračunamo ga tako, da postavimo $5x+3=t$, *tedaj je* $x=\frac{t-3}{5}$ *in* $dx=\frac{dt}{5}$ *in*

$$\int e^{5x+3}\,dx=\int e^t\,\frac{1}{5}\,dt=\frac{1}{5}e^t+C=\frac{1}{5}e^{5x+3}+C\,.$$

2. $\int \tan x\,dx$

3. $\int \cot x\,dx$

4. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

Izračunamo ga tako, da postavimo $tan\,x=t$. *Tedaj je* $\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$ *oziroma* $dx=\cos^2 x\,dt$ *in*

$$\int \frac{tan\,x}{\cos^2 x}\,dx=\int \frac{t}{\cos^2 x}\cos^2 x\,dt=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{tan^2 x}{2}+C\,.$$

INTEGRACIJA PO DELIH (INTEGRATIO PER PARTES)

To integracijsko metodo dobimo iz formule za odvajanje produkta. Naj bosta $u(x)$ in $v(x)$ odvedljivi funkciji. Odvod produkta je

$$(uv)' = u'v + uv' \,.$$

Torej je po definiciji nedoločenega integrala

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx \,.$$

Od tod dobimo

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$$

oziroma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \,.$$

Integriranje diferenciala $uv'\,dx$ prevedemo na integral $\int u'v\,dx$. Metoda je uspešna le tedaj, ko je v zadnji enačbi integral na desni enostavnejši kot integral na levi. Poglejmo nekaj zgledov.

Zgled 21.

$$\int x \sin x\,dx$$

izračunamo tako, da postavimo $u = x$ *in* $dv = \sin x\,dx$*. Tedaj je* $du = dx$ *in* $v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x$*, zato*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C \,.$$

Zgled 22.

$$\int x^n \ln x\,dx \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

izračunamo tako, da postavimo $u = \ln x$ *in* $dv = x^n\,dx$*. Tedaj je* $du = \frac{dx}{x}$ *in* $v = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$*, zato*

$$\begin{aligned}
\textstyle\int u\,dv &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C \,.
\end{aligned}$$

2.1.3 Integracijske metode

Poiskati nedoločeni integral je bistveno težja naloga od odvajanja, saj nedoločenega integrala ni možno zmeraj izraziti s končnim številom osnovnih elementarnih funkcij. V nadaljevanju si bomo pogledali prijeme za integracijo funkcije določenega tipa.

INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

1. *Polinom* stopnje n ima obliko

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

kjer so $a_0, a_1, ..., a_n$ dana števila in $a_n \neq 0$. Polinom integriramo členoma

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\,dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C\,.$$

Zgled 23.

$$\int (3x^5 - 4x + 2)\,dx = \frac{x^6}{2} - 2x^2 + 2x + C\,.$$

2. *Racionalna funkcija* je kvocient dveh polinomov, torej iščemo

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx\,,$$

kjer sta P_m in P_n polinoma.

Za integracijo racionalnih funkcij moramo vedeti nekaj o deljivosti polinomov. Dokaze navedenih trditev bomo zaradi pomanjkanja časa in preskromnega poznavanja algebre izpustili. Naj bosta $P_n(x)$ in $P_m(x)$ polinoma stopnje n in m in naj velja $m \geq n$. Tedaj obstajata polinoma $Q(x)$ stopnje $m-n$ in $R(x)$ stopnje kvečjemu $n-1$ takšna, da velja

$$P_m(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)\,.$$

Nas primer

$$x^3 + x^2 + 4x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3) + 3x\,.$$

Polinom $Q(x)$ je *celi del* kvocienta začetnih polinomov, $R(x)$ pa je *ostanek*, ki je polinom stopnje kvečjemu n. Kvocinet je torej enak

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}\,.$$

Če je ostanek enak 0, pravimo, da je polinom P_m deljiv s polinomom P_n. V primeru, ko je $m = n$, je Q konstanta. Ker polinom zmamo integrirati, moramo obdelati le primer, ko je stopnja števca nižja od stopnje imenovalca. Iščemo torej

$$\int \frac{R(x)}{P_n(x)}\,dx\,,$$

kjer je stopnja polinoma R manjša od n. Naj bo

$$P_n(x) = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}\cdots(x-x_m)^{\mu}\,,$$

pri čemer je $\alpha+\beta+\cdots+\mu = n$ (lahko privzamemo, da je vodilni koeficient enak 1). Racionalno funkcijo $\frac{R(x)}{P_n(x)}$ lahko pišemo v obliki vsote *parcialnih ulomkov*

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{P_n(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha}+\\ &+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta}+\\ &+\cdots+\frac{M_1}{x-x_m}+\frac{M_2}{(x-x_m)^2}+\cdots+\frac{M_\mu}{(x-x_m)^\mu}\,.\end{aligned}$$

Pri tem so $A_1, A_2, ..., A_\alpha, B_1, B_2, ..., B_\beta, ..., M_1, M_2, ..., M_\mu$ konstante. Dokaz bomo izpustili.

Lahko se zgodi, da je katera od ničel polinoma P_n kompleksna. Naj bo torej $x_1 = \alpha + i\beta$ kompleksna ničla. Tedaj je tudi $\overline{x_1} = \alpha - i\beta$ kompleksna ničla polinoma P_n. Izkaže se (podrobnosti bomo izpustili), da lahko pripadajoča parcialna ulomka zapišemo

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-\overline{x_1}} = \frac{A_1}{x-\alpha-i\beta}+\frac{\overline{A_1}}{x-\alpha+i\beta} = \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,,$$

kjer je $p = -2\alpha$ in $q = \alpha^2+\beta^2$, B in C pa sta realni konstanti. V primeru večkratne kompleksne ničle postopamo podobno kot pri večkratni realni ničli.

V razcepu racionalne funkcije na parcialne ulomke se pojavita dva tipa izrazov in sicer

$$\frac{A}{(x-c)^l} \qquad \text{in} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,,$$

pri čemer je x^2+px+q nerazcepni polinom.

Zgled 24. *Poišči nastavek za razcep na parcialne ulomke.*

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{(3x+1)(x+4)^3(3x^2+4)^2} &= \frac{A_1}{3x+1}+\frac{B_1}{x+4}+\frac{B_2}{(x+4)^2}+\frac{B_3}{(x+4)^2}\\ &+\frac{C_1x+D_1}{3x^2+4}+\frac{C_2x+D_2}{(3x^2+4)^2}\end{aligned}$$

Izračun neznanih konstant, ki jih imenujemo tudi neznani koeficienti, privede do reševanja sistema linearnih enačb. Metodo bomo prikazali na primeru.

Zgled 25. *Funkcijo*

$$\frac{3x^3+15x^2-11x+13}{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}$$

razcepi na parcialne ulomke.

Najprej moramo faktorizirati imenovalec. Glede na koeficiente vidimo, da je 1 ničla imenovalca. Uporabimo Hornerjev algoritem in zatem faktoriziramo dobljeni polinom tretje stopnje:

$$x^4+2x^3-2x^2+2x-3=(x-1)(x+3)(x^2+1)\,.$$

Nastavek za razcep na parcialne ulomke je enak

$$\frac{3x^3+15x^2-11x+13}{(x-1)(x+3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Odpravimo ulomke in dobimo:

$$\begin{aligned}3x^3+15x^2-11x+13 &= x^3(A+B+C)+x^2(3A-B+2C+D)+\\ &\quad x(A+B-3C+2D)+3A-B-3D\,.\end{aligned}$$

Če hočemo, da bosta obe strani enaki, moramo enačiti istoležne koeficiente pred potencami spremenljivke x. Sledijo enačbe:

$$\begin{aligned}A+B+C &= 3\\ 3A-B+2C+D &= 15\\ A+B-3C+2D &= -11\\ A-B-3D &= 13\end{aligned}$$

Rešitev teh enačb je

$$A=\frac{5}{2},\ B=-\frac{5}{2},\ C=3,\ D=-1\,.$$

Razcep je tako

$$\frac{3x^3+15x^2-11x+13}{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}=\frac{5}{2(x-1)}-\frac{5}{2(x+3)}+\frac{3x-1}{x^2+1}\,.$$

Zgled 26. *Funkcijo*

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}$$

razcepi na parcialne ulomke.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1} &= \frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \\
&= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\,.
\end{aligned}$$

Na podoben način kot v prejšnjem primeru izračunamo konstante

$$A=C=D=1, B=2\,.$$

Zgled 27. *Funkcijo*

$$\frac{4x^3-3x^2+6x+20}{x^4-2x^3-8x+16}$$

razcepi na parcialne ulomke.

$$\begin{aligned}
\frac{4x^3-3x^2+6x+20}{x^4-2x^3-8x+16} &= \frac{4x^3-3x^2+6x+20}{(x-2)^2(x^2+2x+4)} \\
&= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4}\,.
\end{aligned}$$

Na podoben način kot v obeh prejšnjih primerih izračunamo konstante

$$A=\frac{4}{3},\ B=\frac{13}{3}\ C=\frac{8}{3},\ D=\frac{10}{3}\,.$$

Integral racionalne funkcije je torej vsota integrala polinoma in integralov parcialnih ulomkov oblike

$$\frac{A}{(x-c)^k} \qquad \text{in} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,,$$

pri čemer je $k \geq 1$ in x^2+px+q nerazcepni polinom. Če bomo znali izračunati integrale parcialnih ulomkov, bomo znali integrirati celotno racionalno funkcijo. Poglejmo posamezne možnosti.

(i) *Realna in enkratna ničla*

$$\int \frac{A}{x-c}\,dx = A\ln|x-c|+C\,.$$

Zgled 28. *1.* $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

2. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

(ii) *Realna in večkratna ničla*

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\, dx = \frac{A}{k-1}(x-c)^{-k+1} + C = \frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-c)^{k-1}} + C,\ k > 1\,.$$

(iii) *Kompleksna in enkratna ničla*

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$$

Imenovalec, ki je nerazcepni polinom z diskrimanto $D = p^2 - 4q < 0$, zapišemo v obliki popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= (x+\tfrac{p}{2})^2 + q - \tfrac{p^2}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + \tfrac{4q-p^2}{4} \\ &= (\tfrac{x+p}{2})^2 + \tfrac{-D}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{-D}}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = x + \frac{p}{2}$, tedaj je $dx = dt$. Izračunajmo najprej

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2} dt \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{-D}}{2}}\,\mathrm{atan}\frac{t}{\frac{\sqrt{-D}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C\,. \end{aligned}$$

Za izračun prvotnega integrala upoštevajmo zvezo

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

oziroma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C\,.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx \\ &= \tfrac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} \\ &= \tfrac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + (B - \tfrac{Ap}{2})\tfrac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\tfrac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C\,. \end{aligned}$$

Zgled 29.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+4}{(x^2+2)(x-1)}\,dx &= \int \frac{-x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \\
&= \int \frac{-(x\cdot 2)\cdot \frac{1}{2}}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \\
&= -\tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + 2\ln|x-1| + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}} + C\,.
\end{aligned}$$

Zgled 30.

$$\int \frac{4x^3-3x^2-6x+20}{x^4-2x^3-8x+16}\,dx$$

(iv) *Kompleksna in večkratna ničla*

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx,\; D=p^2-4q<0,\; k>1$$

Integral razdelimo na dva integrala:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\frac{2B-Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\,dx\,.$$

Prvega izračunamo podobno kot prej:

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}\,dx &= \tfrac{A}{2}\int \frac{dt}{t^k} = \\ &= -\frac{A}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\end{aligned}$$

Za drugega uporabimo rekurzivno formulo:

$$\frac{2B-Ap}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$\frac{2B-Ap}{2}\left[\frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})(x^2+px+q)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}\right]$$

Zgled 31. *Izračunaj nedoločeni integral*

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

Nastavek za razcep na parcialne ulomke je enak

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1^2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Rešitev sistema linearnih enačb je

$$A=1,\; B=-1,\; C=-2,\; D=-3,\; E=-4\,.$$

Izračunajmo posamezne integrale

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|\,,$$

$$\int \frac{-x-2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(2x)-2}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\text{atan}x\,,$$

$$\int \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(2x)-4}{(x^2+1)^2}\,dx == -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}-4\left[\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\text{atan}x\right]\,.$$

Razultat je enak

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}\,dx = \ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}} - 4\mathrm{atan}x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C\,.$$

Zgled 32. *Izračunaj nedoločeni integral*

$$\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}\,dx\,.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right) dx \\
&= \ln(|x-1|\sqrt{x^2+x+1}) - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{atan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.
\end{aligned}$$

Videli smo, da lahko izračunamo integral vsake racionalne funkcije. Kadar ima imenovalec racionalne funkcije večkratne ničle (realne ali kompleksne), lahko uporabimo *metodo Ostrogradskega*, s katero prevedemo integracijo na primer, ko ima imenovalec samo enkratne ničle.

Naj bo imenovalec $P(x)$ racionalne funkcije $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ oblike

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n} \\
&\quad \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}\,,
\end{aligned}$$

pri čemer so vsi kvadratni polinomi nerazcepni.

Razstavimo ga na faktorja $P_1(x)$ in $P_2(x)$, kjer je $P_2(x)$ produkt vseh faktorjev v $P(x)$ v prvi potenci

$$P_2(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_mx+q_m)$$

in zato

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n-1} \\
&\quad \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m-1}\,.
\end{aligned}$$

Integral zapišemo v obliki

$$\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx = \frac{R_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{R_2(x)}{P_2(x)}\,dx\,,$$

kjer sta R_1 in R_2 polinoma z nedoločenimi koeficienti za eno stopnjo nižja od stopnje polinomov P_1 in P_2. Celoten izraz odvajamo

$$\left(\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx\right)' = \left(\frac{R_1(x)}{P_1(x)}\right)' + \left(\int \frac{R_2(x)}{P_2(x)}\,dx\right)'$$

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \left(\frac{R_1(x)}{P_1(x)}\right)' + \frac{R_2(x)}{P_2(x)}\,.$$

Zatem odpravimo ulomke in z enačenjem istoležnih koeficientov na obeh straneh identitete dobimo sistem linearnih enačb za neznane koeficiente iz polinomov R_1 in R_2. Z rešitvijo sistema linearnih enačb prevedemo začetni integral na integral racionalne funkcije z enkratnimi koreni.

Zgled 33. *Z metodo Ostrogradskega izračunaj nedoločeni integral*

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Nastavek je enak

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx\,.$$

Z odvajanjem dobimo

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(Ax^2+2Bx-A)}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem:

$$1 = -Ax^2 - 2Bx + A + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D$$

oziroma

$$1 = Cx^3 + x^2(D-A) + x(C-2B) + A + D\,.$$

Istoležni koeficienti na obeh straneh identitete morajo biti enaki, zato dobimo sistem enačb, katerega rešitev je

$$A = D = \frac{1}{2},\ B = C = 0\,.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{atan} x + C\,.\end{aligned}$$

Zgled 34.

$$\int \frac{x^3}{(x^2+2)^2}\,dx$$

Zgled 35.

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}\, dx$$

Integriranje funkcij sinus in kosinus

Za integracijo kotnih funkcij sinus in kosinus sta zelo uporabni naslednji zvezi, ki linearizirata obe funkciji:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{in}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

ki ju ni težko preveriti, kar naj bralec sam naredi.

Poglejmo tipične primere integralov kotnih funkcij.

(i) $\int \sin^m x\, dx,\ \int \cos^m x\, dx$

a) Če je m liho število večje od 1, torej $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, je možno integrand zapisati v obliki

$$\sin^m x = (1-\cos^2 x)^k \sin x\,.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $\cos x = t$ prevedemo primer na integral polinoma.
V drugem primeru zapišemo

$$\cos^m x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$$

in uvedemo $\sin x = t$.

b) Če je m sodo število, torej $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, uporabimo zvezo

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$

S tem se stopnja eksponenta zniža za polovico. Dokler je eksponent sodo število, postopek ponavljamo, ko pa pridemo do lihega eksponenta uporabimo točko a).
V drugem primeru uporabimo zvezo

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}\,.$$

Zgled 36. *Izračunajmo $\int cos^4 x\, dx$.*

$$\begin{aligned}
\int cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \tfrac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))\, dx \\
&= \int \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$
Če je vsaj en eksponent lih, postopamo tako kot v (i.a), sicer pa uporabimo postopek iz (i.b).

Zgled 37. *Izračunajmo integrala.*

1. $\int cos^3 x \sin^3 x\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int cos^3 x \sin^3 x\, dx &= \int (\cos x\, \sin^3 x - \sin^5 x \cos x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\sin^4 x + \frac{1}{6}\sin^6 x + C\,.
\end{aligned}$$

2. $\int cos^2 x \sin^2 x\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int cos^2 x \sin^2 x\, dx &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx \\
&= \int \frac{1}{4}(1-\cos^2(2x))\, dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(1-\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\, dx \\
&= \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin(4x)+C\,.
\end{aligned}$$

(iii) $\int \sin(ax)\cos(bx)\, dx,\ \int \sin(ax)\sin(bx)\, dx,\ \int \cos(ax)\cos(bx)\, dx,\ a, b \in \mathbb{R}$

Zanima nas samo primer $a \neq b$, ker imamo sicer primer iz točke (ii). Uporabimo formule

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin((a-b)x)+\sin((a+b)x)],$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}[(\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)],$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[(\cos((a-b)x)+\cos((a+b)x)],$$

v veljavnost katerih se lahko prepričamo z uporabo adicijskih izrekov.

Zgled 38. *Izračunajmo integrala:*

1. $\int \cos(3x)\sin x\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int \cos(3x)\sin x\, dx &= \int \frac{1}{2}(\sin(-2x)+\cos(4x)) \\
&= \frac{1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)+C\,.
\end{aligned}$$

2. $\int \cos(2x)\cos(4x)\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int \cos(2x)\cos(4x)\, dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(2x)+\cos(6x)) \\
&= \frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{12}\sin(6x)+C\,.
\end{aligned}$$

(iv) $\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,dx = I,\ \int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,dx = J,\ a,b\in\mathbb{R}$

Integriramo po delih $u = \mathrm{e}^{ax}$, $dv = \sin(bx)\,dx$. Potem je $du = a\mathrm{e}^{ax}$ in $v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$ in

$$I = -\frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx) = -\frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}J\,.$$

Podobno

$$J = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}I$$

od koder sledi

$$J = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}J\,.$$

Zato velja

$$J = \mathrm{e}^{ax}\frac{b\sin(bx) + a\cos(bx)}{a^2+b^2} + C$$

in

$$I = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2} + C\,.$$

(v) *Univerzalna subsitucija*

Vpeljemo novo spremenljivko $t = \tan\frac{x}{2}$. Tedaj je

$$x = 2\mathrm{atan}t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

Nadalje velja

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(2\tfrac{x}{2}) = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\tan\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos(2\tfrac{x}{2}) = \cos^2\tfrac{x}{2} - \sin^2\tfrac{x}{2} = \cos^2\tfrac{x}{2}(1-\tan^2\tfrac{x}{2})\\ &= \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}(1-\tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.\end{aligned}$$

Zgled 39. *Z uporabo univerzalne substitucije izračunajmo integrale:*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2\,t}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \ln(\tan\tfrac{x}{2}) + C\,.\end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x}\, dx$

3. $\int \dfrac{2+\sin x}{3+\cos x}\,dx$

Integriranje funkcij pod korenskim znakom (iracionalnih funkcij)

(i) $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$

V obeh primerih uvedemo novo spremenljivko $t = ax+b$. Tedaj je $dt = a\,dx$ in

$$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \frac{1}{a}\int t^{\frac{m}{n}}\,dt$$

in

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}} = \frac{1}{a}\int t^{\frac{-m}{n}}\,dt\,.$$

Oba integrala že znamo izračunati.

(ii) $\int R\left(\sqrt[n_1]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$

Pri tem mora biti $ad - bc \neq 0$ in v integral uvedemo novo spremenljivko

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r\,,$$

kjer je r najmanjši skupni večkratnik korenskih eksponentov $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Zgled 40. *1.* $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

2. $\int x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Kvadratno funkcijo pod korenski znakom preoblikujemo na popolni kvadrat:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

in uvedemo novo spremenljivko $t = x + \frac{b}{2a}$. S tem dobimo enega od naslednjih osnovnih integralov:

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{ali} \quad \int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.$$

Zgled 41. *Izračunajmo integrale:*

1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}\\ &= \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+C\,.\end{aligned}$$

2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}\\ &= \operatorname{asin}\tfrac{x+1}{2}+C\,.\end{aligned}$$

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x}}\,dx &= \int \frac{dx}{2\sqrt{1-(x-1)^2}}\\ &= \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= -\operatorname{asin}(x-1)+C\,.\end{aligned}$$

(iii) $\int \dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Tu je $P_n(x)$ poljuben polinom stopnje n. Ta tip integrala zahteva poseben nastavek

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

Pri tem je $Q_{n-1}(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu $n-1$ in D neznana konstanta. Koeficiente polinoma $Q_{n-1}(x)$ in konstanto D določimo tako, da najprej nastavek odvajamo, nato odpravimo ulomke in enačimo istoležne koeficiente pred potencami spremenljivke x na levi in desni strani. Metodo si poglejmo na Zgledu 42.

Zgled 42. *Izračunajmo integrala:*

1. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= (Ax+B)\sqrt{1-x^2} + C\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad /' \\
\frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}} &= A\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x(Ax+B)}{2\sqrt{1-x^2}} + C\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
x^2-2x &= x^2(-2A) + x(-B) + A + C \qquad \Rightarrow \\
& A = -\tfrac{1}{2},\ B = 2,\ C = \tfrac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Integral je tako enak

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \left(-\frac{x}{2}+2\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left((4-x)\sqrt{1-x^2} + \operatorname{asin} x\right) + D\,.
\end{aligned}
$$

2. $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}\, dx$

Neelementarni integrali

Nekaterih integralov ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami, lahko pa si pomagamo z razvojem v potenčno vrsto. Integracija funkcijskih vrst temelji na izreku, ki pravi, da smemo (enakomerno) konvergentno funkcijsko vrsto členoma integrirati. To pomeni, da smemo potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ integrirati na simetričnem podintervalu intervala $(-R, R)$, kjer je R konvergenčni polmer potenčne vrste. Poglejmo primera takšnih integralov.

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x}{x} &= \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \\
\frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Integriramo po členih in dobimo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{x}\,dx &= C + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \cdots \\
\int \frac{\sin x}{x}\,dx &= C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Ti funkciji imenujemo *integralni sinus*

$$
Si(x) = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots
$$

in *integralna eksponentna funkcija*

$$
Ei(x) = C + \ln x + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \cdots .
$$

Bralec naj sam premisli o konvergenčnem območju posamezne funkcije.

Zgled 43. *Poišči funkcijo* integralni kosinus $Ci(x) = \int \frac{\cos x}{x}\,dx$.

2.2 Določeni integral

Definirali bomo določeni integral, ki zaenkrat s prejšnjim razdelkom nima skupnega prav ničesar razen podobnosti v imenu, in pogledali njegove lastnosti.

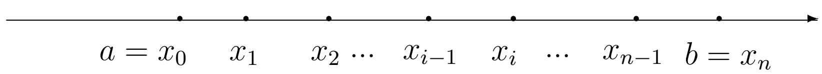
Definicija določenega integrala

Naj bo $[a, b]$ poljuben zaprti interval in f neka omejena funkcija na tem intervalu. Množica točk $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ je *delitev* intervala $[a, b]$, če je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Delitev intervala vidimo na Sliki 2.1. Dolžina i-tega intervala je

$$d_i = x_i - x_{i-1}\,,\ \ i = 1, ..., n\,.$$



Slika 2.1: Delitev intervala $[a, b]$.

Velja $d_1 + d_2 + ... + d_n = x_n - x_0 = b - a$. Označimo $d = \max\{d_1, d_2, ..., d_n\}$. Na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izberimo poljubno točko ξ_i. Vsoto

$$R_D(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) d_i$$

imenujemo *Riemannova integralska vsota* funkcije f za delitev D intervala $[a, b]$ (*glej Sliko 2.2*). Dani delitvi D pripada v splošnem veliko različnih integralskih vsot, ker izbiramo točke na podintervalih poljubno.

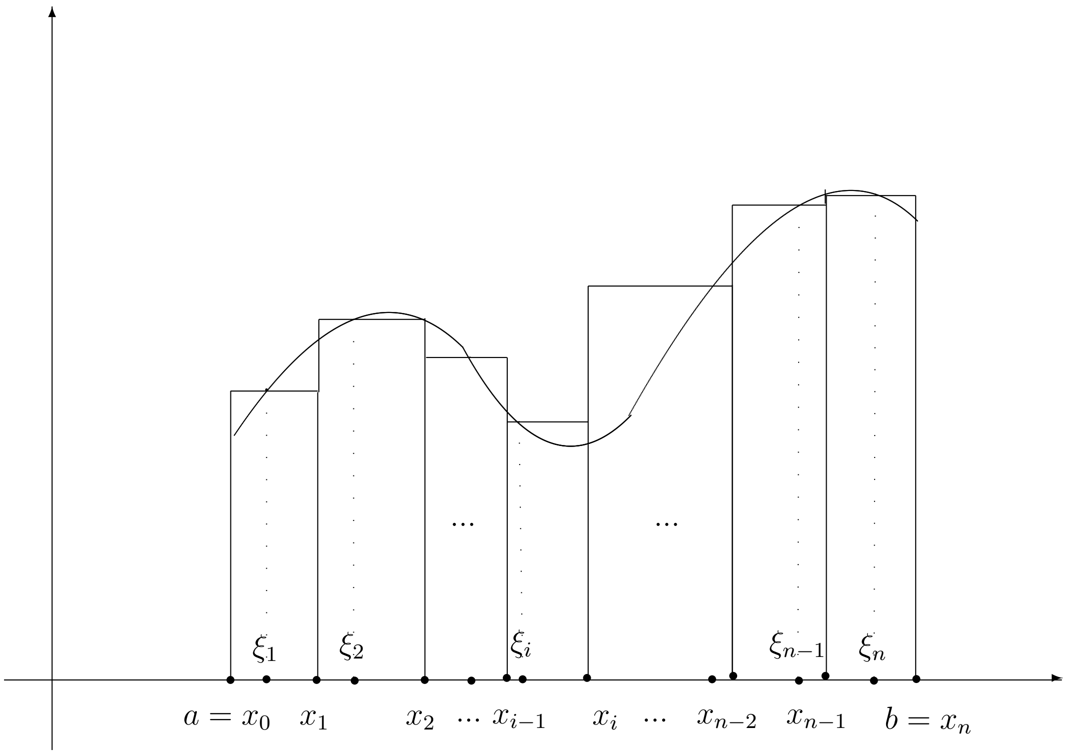
Definicija 2.7. *Naj bo D delitev intervala $[a, b]$. Delitev D' je* nadaljevanje *delitve D, če je D' delitev intervala $[a, b]$ in velja $D \subseteq D'$.*

Definicija 2.8. *Če obstaja limita*

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) d_i\,,$$

potem število I imenujemo določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ in označimo

$$I = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$



Slika 2.2: Riemannova integralska vsota.

To pomeni, da je število I določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, če se od njega ločijo vse integralske vsote funkcije f za vse zadosti drobne delitve poljubno malo:

$$\forall \epsilon > 0, \exists D : D \subseteq D' \Rightarrow |R_{D'}(f) - I| < \epsilon .$$

Definicija 2.9. *Funkcijo, za katero obstaja določeni integral na intervalu* $[a, b]$*, pravimo, da je* integrabilna *na tem intervalu.*

Interval $[a, b]$ je *integracijski interval*, število a je *spodnja meja*, število b pa *zgornja meja* integrala.

Integrabilnost funkcij

Riemannova vsota funkcije f z delitvijo D ni enolično določena, zato bomo Riemannovo vsoto za izbrano delitev ocenili z dvema bolj določenima vsotama. Na ta način lahko obravnavamo le na intervalu $[a, b]$ omejene funkcije.

Definicija 2.10. Spodnja Riemannova vsota *funkcije f na intervalu $[a, b]$ za delitev D je število*

$$s_D(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, d_i \, ,$$

zgornja Riemannova vsota *funkcije* f *na intervalu* $[a,b]$ *za delitev* D *je število*

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, d_i\,,$$

kjer sta

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad in \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,.$$

Trditev 2.11. *Naj bo* D *delitev intervala* $[a,b]$ *in* f *omejena funkcija na tem intervalu. Tedaj velja*

$$s_D(f) \leq R_D(f) \leq S_D(f)\,.$$

Dokaz. Naj bo $[x_{i-1},x_i]$ poljuben podinterval delitve D. Tedaj veljajo ocene:

$$\begin{array}{ccccc} m_i & \leq & f(\xi_i) & \leq & M_i \\ m_i\, d_i & \leq & f(\xi_i)\, d_i & \leq & M_i\, d_i \\ \sum_{i=1}^n m_i\, d_i & \leq & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\, d_i & \leq & \sum_{i=1}^n M_i\, d_i \\ s_D(f) & \leq & R_D(f) & \leq & S_D(f)\,. \end{array}$$

∎

Izrek 2.12. *Za delitvi* $D \subseteq D'$ *je*

$$s_D(f) \leq s_{D'}(f) \leq S_{D'}(f) \leq S_D(f)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ poljubna delitev. Nadaljevanje D' delitve D naredimo tako, da delitvi D dodamo novo delilno točko x', ki naj pripada nekemu podintervalu $[x_{k-1},x_k]$. Tedaj je $[x_{k-1},x'] \cup [x',x_k] = [x_{k-1},x_k]$. Označimo

$$m^* = \inf_{[x_{k-1},x']} f(x) \qquad \text{in} \qquad m^{**} = \inf_{[x',x_k]} f(x)$$

in očitno velja $m_k \leq m^*$ in $m_k \leq m^{**}$. Tedaj lahko naredimo oceno:

$$\begin{aligned} s_D(f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n m_i\, d_i = \sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m_k\, d_k + \sum_{i=k+1}^n m_i\, d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m_k\,(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i\, d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m_k\,(x' - x_{k-1}) + m_k\,(x_k - x') + \sum_{i=k+1}^n m_i\, d_i \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m^*\,(x' - x_{k-1}) + m^{**}\,(x_k - x') + \sum_{i=k+1}^n m_i\, d_i \\ &= s_{D'}(f)\,. \end{aligned}$$

Podobno pokažemo oceno za zgornjo vsoto.

Če ima delitev D' več delilnih točk, oceni prav tako veljata, kar brez težav pokažemo z matematično indukcijo.

∎

Posledica 2.13. *Za poljubni delitvi D_1 in D_2 danega intervala velja*

$$s_{D_1}(f) \leq S_{D_2}(f)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D_1 \cup D_2 = D$. Ker je D nadaljevanje delitev tako D_1 kot D_2, po Izreku 2.12 velja

$$s_{D_1}(f) \leq s_D \leq S_D(f) \leq S_{D_2}(f)\,.$$

∎

Posledica 2.14. *Naj bo $\mathcal{D}$ množica vseh delitev intervala $[a, b]$ in f omejena funkcija na tem intervalu. Tedaj obstaja supremum*

$$\sup\{s_D(f)|D \in \mathcal{D}\} = R_s(f)\,,$$

ki ga imenujemo spodnji Riemannov integral *funkcije f na intervalu $[a, b]$. Podobno obstaja infimum*

$$\inf\{S_D(f)|D \in \mathcal{D}\} = R_S(f)\,,$$

ki ga imenujemo zgornji Riemannov integral *funkcije f na intervalu $[a, b]$. Nadalje velja*

$$R_s(f) \leq R_S(f)\,.$$

Dokaz. Zaradi Posledice 2.13 obstajata tako zgoraj navedena supremum, kot tudi infimum. ∎

Zdaj znamo dovolj, da lahko preverimo integrabilnost funkcij.

Izrek 2.15. *Funkcija f je integrabilna na $[a, b]$ natanko tedaj, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja takšna delitev D intervala $[a, b]$, da je*

$$S_D(f) - s_D(f) < \epsilon\,.$$

Dokaz. Pokažimo najprej v eno smer, torej na bo f integrabilna na $[a, b]$. Zato za $\forall \epsilon_1 > 0$ obstaja taka delitev $D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a, b]$, da je

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - R_{D_1}(f) \right| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4}\,.$$

Po definiciji supremuma obstaja na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ takšna točka c_i, da velja

$$M_i - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq f(c_i) < M_i\,.$$

Pomnožimo z d_i in seštejemo po vseh podintervalih ter tako dobimo

$$S_{D_1}(f) - \frac{\epsilon}{4} \leq R_{D_1}(f) < S_{D_1}(f)$$

oziroma

$$|S_{D_1}(f) - R_{D_1}(f)| < \frac{\epsilon}{4}\,.$$

Zato velja

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{D_1}(f)\right| &= \left|\int_a^b f(x)\,dx - R_{D_1}(f) + R_{D_1}(f) - S_{D_1}(f)\right| \\ &\leq |\int_a^b f(x)\,dx - R_{D_1}(f)| + |R_{D_1}(f) - S_{D_1}(f)| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

Na podoben način pokažemo, da za tudi za delitev D_2 velja

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - s_{D_2}(f)\right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Tedaj za delitev $D_1 \cup D_2 = D$ velja

$$\begin{aligned} S_D(f) - s_D(f) &\leq S_{D_1}(f) - s_{D_2}(f) = |S_{D_1}(f) - s_{D_2}(f)| \\ &= \left|S_{D_1}(f) - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx - s_{D_2}(f)\right| \\ &\leq \left|S_{D_1}(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b f(x)\,dx - s_{D_2}(f)\right| \\ &< \epsilon\,. \end{aligned}$$

Pokažimo še v obratno smer. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka delitev intervala $[a, b]$, da je $S_D(f) - s_D(f) < \epsilon$. Uporabimo Posledico 2.14 in sklepamo

$$0 \leq R_S(f) - R_s(f) \leq S_D(f) - s_D(f) < \epsilon\,.$$

Ker mora neenakost veljati za vsak $\epsilon > 0$, to pomeni, da mora biti $R_S(f) = R_s(f)$. Označimo $I = R_S(f) = R_s(f)$, torej je

$$I = \sup\{s_D(f)|D \in \mathcal{D}\} = \inf\{S_D(f)|D \in \mathcal{D}\}\,.$$

Ker je I infimum vseh zgornjih Riemmanovih vsot, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka delitev D_1, da je $I \leq S_{D_1}(f) < I + \epsilon$. Podobno, ker je I supremum vseh spodnjih Riemmanovih vsot, obstaja taka delitev D_2, da velja $I - \epsilon < s_{D_2}(f) \leq I$. Za delitev $D = D_1 \cup D_2$ tako velja

$$I - \epsilon < s_{D_2}(f) \leq s_D(f) \leq R_D(f) \leq S_D(f) \leq S_{D_2}(f) < I + \epsilon$$

oziroma

$$I - \epsilon < R_D(f) < I + \epsilon \Rightarrow |R_D(f) - I| < \epsilon$$

in $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

∎

Iz dokaza Izreka 2.15 neposredno sledi naslednja posledica.

Posledica 2.16. *Funkcija f je integrabilna natanko tedaj, ko je $R_D(f) = R_s(f) = R_S(f)$.*

S pomočjo Izreka 2.15 lahko pokažemo integrabilnost dveh razredov funkcij.

Izrek 2.17. *Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ monotona, tedaj je integrabilna.*

Dokaz. Naj bo funkcija f na $[a, b]$ monotono naraščajoča. Tedaj je za vsako delitev D intervala $[a, b]$ $m_i = f(x_{i-1})$ in $M_i = f(x_i)$. Zato je

$$\begin{aligned} S_D(f) - s_D(f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n f(x_i)\,d_i - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\,d_i\,. \end{aligned}$$

Izberemo poljuben $\epsilon > 0$ in tako delitev D' intervala $[a, b]$, da je

$$\max\{d_i | i = 1, 2, \ldots, n\} < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} = \Delta\,.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} S_{D'}(f) - s_{D'}(f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})\,d_i \\ &< \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\,\Delta \\ &= \Delta \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \Delta(f(b) - f(a)) = \epsilon\,. \end{aligned}$$

∎

Podoben, zelo pomemben, izrek velja za zvezne funkcije, a ker dokaz zahteva uporabo pojma enakomerna zveznost, ki je ne poznamo, ga bomo izpustili.

Izrek 2.18. *Vsaka zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ je na tem intervalu tudi integrabilna.*

□

Omenimo samo, da obrat izreka ne velja, saj smo integrirali odsekoma zvezne funkcije, ki seveda niso zvezne.

Lastnosti določenega integrala

Izrek 2.19. *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji ter λ in μ poljubni konstanti. Tedaj je na $[a, b]$ integrabilna tudi funkcija $\lambda f(x) + \mu g(x)$ in*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Dokaz. Naj bo D poljubna delitev intervala $[a, b]$ na n podintervalov. Tedaj je integralska vsota

$$\begin{aligned} R_{\lambda f+\mu g}(D) &= \textstyle\sum_{i=1}^n [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)] d_i \\ &= \lambda \textstyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i) d_i + \mu \sum_{i=1}^n g(\xi_i) d_i \\ &= \lambda R_D(f) + \mu R_D(f)\,. \end{aligned}$$

Če je delitev D dovolj drobna, se leva stran enakosti poljubno majhno loči od števila $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx$, desna pa od števila $\lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$. ∎

Izrek je mogoče posplošiti na več členov, kar lahko dokažemo z indukcijo po n:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(x)\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Definicija 2.20. *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je* odsekoma zvezna*, če obstaja taka delitev intervala*

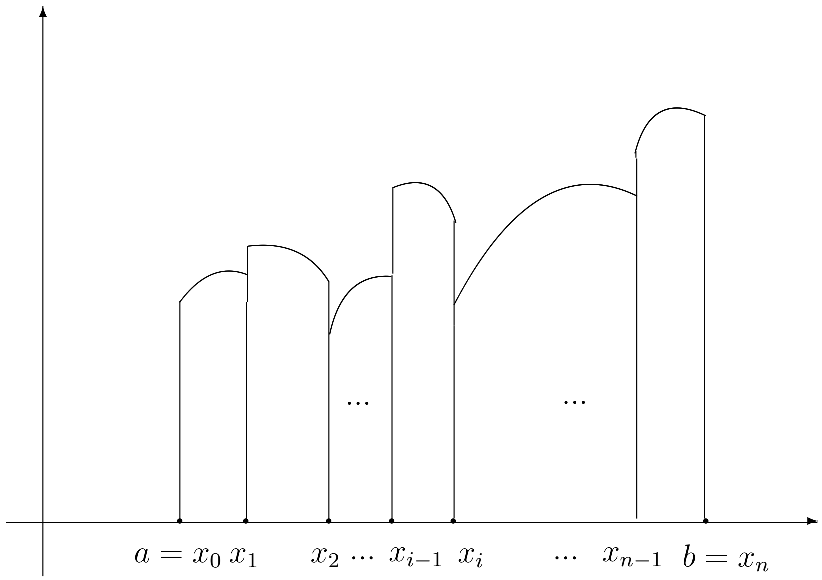
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b\,,$$

da na vsakem intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ obstaja taka zvezna funkcija $f_i(x)$, da je $f(x) = f_i(x)$ za vsak $x \in (a_{i-1}, a_i)$ (glej Sliko 2.3).

Če je f odsekoma zvezna, tedaj je zvezna povsod razen v končno mnogo točkah. Tudi za odsekoma zvezne funkcije velja, da so integrabilne.

Izrek 2.21. *Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ odsekoma zvezna in c katerokoli število med a in b, je*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$



Slika 2.3: Odsekoma zvezna funkcija.

Dokaz. Ker je funkcija f odsekoma zvezna na $[a, b]$, je taka tudi na intervalih $[a, c]$ in $[c, b]$, zato obstajajo vsi trije pripadajoči integrali. Vzemimo tako delitev $D = \{x_0, ..., x_n\}$ intervala $[a, b]$, da je c ena od delilnih točk. Naj bo $c = x_m$, $0 < m < n$. Tedaj lahko zapišemo integralsko vsoto kot

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)d_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)d_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)d_i \,.$$

Za dovolj drobno delitev D limitirajo integralske vsote k identiteti iz izreka. ∎

Tudi ta izrek je mogoče posplošiti na več členov, kar dokažemo z indukcijo po n:

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx \,.$$

Izrek 2.22. *Če v integralu zamenjamo meji, dobi integral nasproten predznak:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \,.$$

Dokaz. Če zamenjamo meji, je treba v integralski vsoti nadomestiti $d_i = x_i - x_{i-1}$ z $-d_i = x_{i-1} - x_i$, zato dobi vsaka integralska vsota samo nasproten predznak in integral, ki je limita integralskih vsot, prav tako. ∎

Posledica 2.23.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Dokaz.

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

■

Lema 2.24. *Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in naj bosta m in M natančni spodnja in zgornja meja funkcije f na $[a,b]$. Tedaj je*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a,b]$. Izberimo poljubno točko ξ_i na vsakem od pointervalov $[x_{i-1}, x_i]$. Tedaj velja:

$$\begin{array}{ccccc}
m & \le & f(\xi_i) & \le & M \\
m\,d_i & \le & f(\xi_i)\,d_i & \le & M\,d_i \\
\sum_{i=1}^n m\,d_i & \le & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,d_i & \le & \sum_{i=1}^n M\,d_i \\
m\sum_{i=1}^n d_i & \le & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,d_i & \le & M\sum_{i=1}^n, d_i \\
m(b-a) & \le & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,d_i & \le & M(b-a) \\
m(b-a) & \le & R_D(f) & \le & M(b-a)
\end{array}$$

Ker je f integrabilna, je

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

■

Izrek 2.25. *(O srednji vrednosti) Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja na intervalu $[a,b]$ integrabilne funkcije f. Tedaj obstaja taka vrednost c med m in M, da je*

$$\int_a^b f(x) = c(b-a)\,.$$

Če pa je funkcija f tudi zvezna, je $c = f(\xi)$ za neki $\xi \in [a,b]$.

Dokaz. Iz leme 2.24 neposredno sledi

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

in prvi del je dokazan. Drugi del izreka sledi iz tega, da zvezna funkcija zavzame vse vrednosti med m in M. ∎

Število c imenujemo *srednja vrednost* funkcije f na intervalu $[a, b]$, zato ta izrek imenujemo *izrek o srednji vrednosti.*

2.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

V tem razdelku bomo našli povezavi med prejšnjima dvema razdelkoma, ki sta bila na videz precej nepovezana.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Zamenjajmo konstantno zgornjo mejo b v določenem integralu $\int_a^b f$ s spremenljivko $x \in [a, b]$ ter definirajmo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

V tem primeru ne moremo vpeljati x kot integracijske spremenljivke, saj smo x fiksirali, zato pišemo na primer t.

Izrek 2.26. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je njen določeni integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$, odvedljiva funkcija in velja $F' = f$.*

Dokaz. Izberimo poljubni točki x in $x + h$ z intervala $[a, b]$. Ker je

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$$

je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Ker je f zvezna, izrek o srednji vrednosti pove, da za vsak h obstaja točka $\xi \in [x, x+h]$ taka, da je

$$F(x+h) - F(x) = f(\xi)h$$

oziroma

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi)\,.$$

(Pri tem velja $m \leq f(\xi) \leq M$, kjer sta m in M natančni meji funkcije f na $[a,b]$.) Opazimo, da če gre h proti 0, gre ξ proti x in ker je f zvezna funkcija, je

$$\lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

in zato

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)\,.$$

∎

Posledica 2.27. *Nedoločeni integral zvezne funkcije f obstaja.*

Dokaz. To je ravno funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. ∎

Posledica 2.28. *(Newton-Leibnizova formula) Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je F nedoločeni integral funkcije f, potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Dokaz.

1. Naj bo $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Tedaj je

   $$F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{in} \qquad F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

   Torej je

   $$\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - F_0(a)\,.$$

   Po prejšnjem izreku je F_0 nedoločeni integral funkcije f. Torej smo Newton-Leibnizovo formulo dokazali za en nedoločeni integral, namreč za funkcijo F_0.

2. Naj bo $F(x)$ nek nadaljnji nedoločeni integral funkcije f. Tedaj obstaja taka konstanta C, da je

   $$F(x) = F_0(x) + C, \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

   Torej velja

   $$F(b) - F(a) = (F_0(b) + C) - (F_0(a) + C) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

∎

Pogosto namesto $F(b) - F(a)$ uporabljamo zapis
$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b\,.$$

Poglejmo vpliv vpeljave nove spremenljivke in integracije po delih na meje v določenem integralu.

Trditev 2.29. *(Uvedba nove spremenljivke) Naj bo f zvezna funkcija in $x = x(t)$ zvezno odvedljiva funkcija. Tedaj je*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)\,dt\,,$$
pri čemer je $a = x(c)$ in $b = x(d)$.

Dokaz. Naj bo F nedoločeni integral funkcije f (ta obstaja, ker je f zvezna). Tedaj je
$$[F(x(t))]' = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)\,.$$
Newton-Lebnizova formula pove, da je
$$\int_c^d f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(t))\big|_c^d = F(x(d)) - F(x(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$
∎

Zgled 44. *Izračunaj določeni integral*
$$\int_1^2 \frac{x}{x^2+2}\,dx.$$

Zgled 45. *Izračunaj določeni integral*

$$\int_1^2 e^{3x+2}\,dx.$$

Zgled 46. *Izračunajmo določeni integral*

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$$

z vpeljavo nove spremenljivke $x = x(t) = a\sin t$.

Izračunamo $d\,x = a\,\cos t\,dt$ in izrazimo $t = \mathrm{asin}\frac{x}{a}$. Tedaj je spodnj meja je

$\operatorname{asin}\frac{0}{a} = 0$ in zgornja meja je $\operatorname{asin}\frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$. Dobimo integral

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \, \cos t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 |\cos t| \, \cos t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \, \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt \\
&= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^2 \, \pi}{4} \, .
\end{aligned}$$

Poglejmo si integracijo sode oziroma lihe funkcije na simetričnem intervalu $[-a, a]$.

1. Naj bo $f(x)$ soda funkcija, torej $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in [-a, a]$. Vpeljemo novo spremenljivko $x = -t$:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(x)\, dx &= \int_{-a}^0 f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx \\
&= \int_a^0 f(-t)\, (-dt) + \int_0^a f(x)\, dx \\
&= \int_0^a f(t)\, dt + \int_0^a f(x)\, dx \\
&= \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx \\
&= 2 \int_0^a f(x)\, dx \, .
\end{aligned}$$

2. V primeru lihe funkcije $(f(-x) = -f(x))$ na podoben način dobimo

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0 \, .$$

Zapišimo integracije po delih

$$\int u dv = uv - \int v du$$

v obliki

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,.$$

Uporaba Newton-Leibnizove formule da

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \left[u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right]\Big|_a^b \\ &= [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx\,.\end{aligned}$$

Zgled 47. *Izračunajmo določeni integral* $\int_0^\pi x\sin x\,dx$*.*

Uporabimo integracijo po delih in sicer je $u = x$ in $dv = \sin x\,dx$. Tedaj je $du = dx$ in $v = -\cos x$:

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = (-x\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi\,.$$

Zgled 48. *Izračunaj določeni integral*

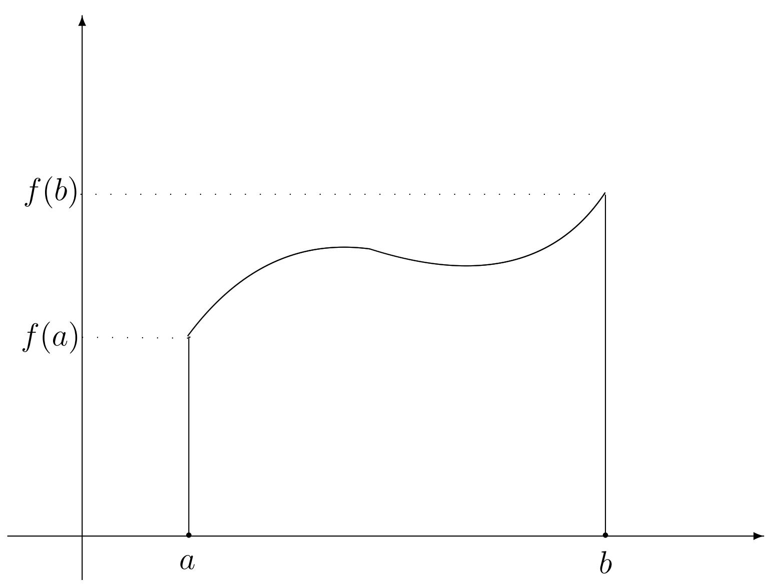
$$\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx.$$

2.4 Uporaba določenega integrala v geometriji

Ploščina lika

Poglejmo najprepostejšo uporabo določenega integrala oziroma njegov geometrijski pomen. V nadaljevanju bomo spoznali še nekaj drugih primerov uporabe določenega integrala. Naj bo f integrabilna na $[a, b]$ in nenegativna. Lik, določen z $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$, imenujemo *krivočrtni trapez* T, katerega ploščino bomo označili p_T in ga vidimo na Sliki 2.4. Z večanjem števila delilnih točk delitve D intervala $[a, b]$ Riemannova integralska vsota $R_D(f)$ konvergira k ploščini p_T, zato je

$$\int_a^b f(x)dx = p_T\,.$$

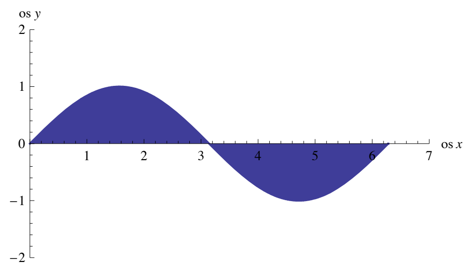


Slika 2.4: Krivočrtni trapez.

Zgled 49. *Izračunaj ploščino lika, ki je določen z grafom funkcije sinus na intervalu* $[0, 2\pi]$ *in osj* x.

Območje sestavljata dva ploščinsko enako velika dela, kot je to razvidno s Slike 2.5, zato je ploščina S enaka:

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^\pi \sin x\,dx \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

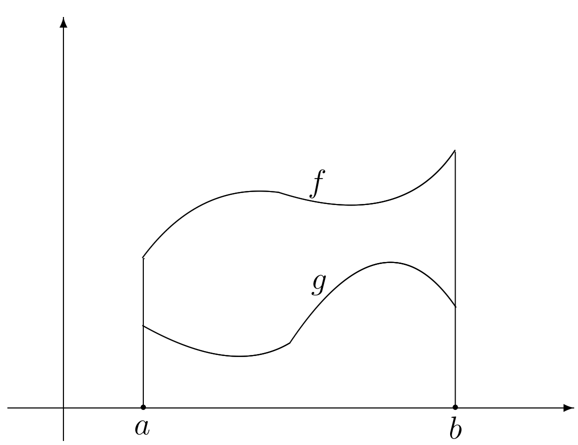


Slika 2.5: Območje, ki je določeno s funkcijo sinus.

Trditev 2.30. *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni, $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Ploščina lika, ki ga omejujejo premice $x = a$, $x = b$ ter grafa funkcij f in g, je določena z*

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx\,.$$

Dokaz. Ideja dokaza je razvidna iz primera, ko sta obe funkciji pozitivni, kar vidimo na Sliki 2.6. ∎



Slika 2.6: Ploščina območja med dvema funkcijama.

Izrek 2.31. *Če sta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji in je $g(x) \geq f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je*

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

V posebnem, ko je $f(x) = 0$ na $[a, b]$, dobimo

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq 0\,.$$

Dokaz. Naj bo $h(x) = g(x) - f(x)$. Tedaj za poljubno delitev D velja

$$0 \leq s_D(h) \leq \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Drugi del izreka sledi neposredno iz prvega dela.

∎

Poglejmo še izrek o vplivu absolutne vrednosti na določeni integral, a ga ne bomo dokazali.

Izrek 2.32. *Če je f integrabilna na intervalu $[a, b]$, je $|f|$ prav tako integrabilna na tem intervalu in velja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)\,dx|\,.$$

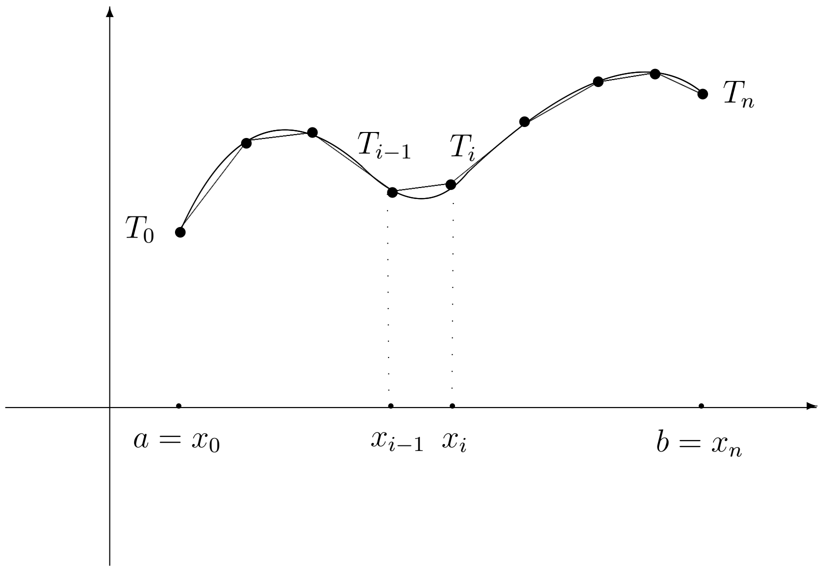
□

Dolžina loka

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija ter $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Definirajmo točke $T_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$. Daljice $T_{i-1}T_i$, $i = 1, ..., n$, sestavljajo *poligonsko črto* $T_0T_1 \cdots T_n$, ki jo vidimo na Sliki 2.7.

Dolžina posamezne daljice je po Pitagorovem izreku enaka

$$\begin{aligned}
\overline{T_{i-1}T_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\
&\underbrace{=}_{\text{Lagrang. i.}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(c_i)^2(x_i - x_{i-1})^2} \\
&= \sqrt{d_i^2(1 + f'(c_i)^2)} \\
&= d_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2}, \qquad c_i \in (x_{i-1}, x_i)
\end{aligned}$$



Slika 2.7: Dolžina loka oz. poligonske črte.

Dolžina poligonske črte je vsota dolžin posameznih daljic

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{T_{i-1}T_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\, d_i = R_{\sqrt{1+f'^2}}(D)\,.$$

Zato je naravno definirati *dolžino loka* ℓ funkcije f na intervalu $[a, b]$ kot

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Zgled 50. *Izračunajmo dolžino loka funkcije* $f(x) = x$ *na* $[0, 1]$.

Ker je $f'(x) = 1$, je dolžina loka:

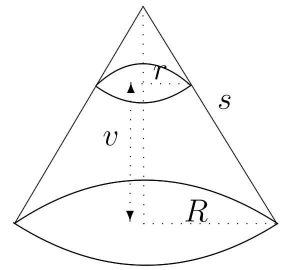
$$\ell = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\,.$$

Prostornina rotacijskega telesa

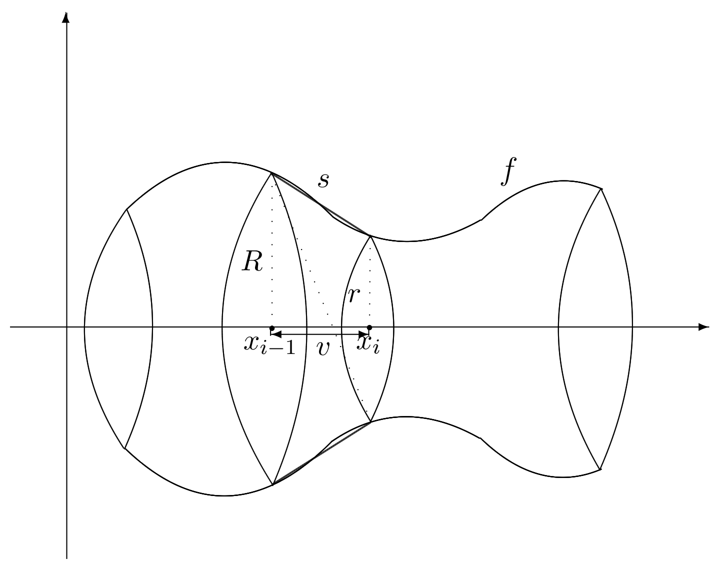
Spomnimo se najprej prostornine prisekanega stožca (*glej Sliko 2.8*), ki je podana z

$$V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\,,$$

pri čemer sta r in R polmera osnovnih ploskev (krogov), v je višina in s stranski rob prisekanega stožca.



Slika 2.8: Prisekani stožec.



Slika 2.9: Rotacijsko telo.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna nenegativna funkcija. Z vrtenjem grafa funkcije f okoli x osi dobimo *rotacijsko ploskev*, ki omejuje *rotacijsko telo*, ki ga vidimo na Sliki 2.9. Zanima nas prostornina rotacijskega telesa V.

Naj bo $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Krivuljo $f(x)$ na $[a, b]$ aproksimiramo s poligonsko črto $T_0T_1...T_n$, kjer je $T_i = f(x_i)$. Dolžina i-tega podintervala naj bo kot običajno d_i. To telo je prisekani stožec, za katerega je

$$r = f(x_{i-1}),\ R = f(x_i) \quad \text{ali} \quad R = f(x_{i-1}),\ r = f(x_i)$$

in

$$v = d_i\,,$$

kot je to razvidno s Slike 2.9.

Prostornina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem poligonske črte je zato enaka

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi d_i}{3}(f(x_{i-1})^2+f(x_i)^2+f(x_{i-1})f(x_i))\,.$$

Ker je f zvezna funkcija in sta x_{i-1} in x_i blizu skupaj, je

$$f(x_{i-1})\approx f(x_i)\approx f(\xi_i)\,,$$

kjer je $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$. Tako je

$$\begin{aligned} V &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi d_i}{3}3f(\xi_i)^2 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\pi f(\xi_i)^2 d_i \\ &= R_{\pi f^2}(D)\,. \end{aligned}$$

Naravno je vpeljati prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem zvezne funkcije na intervalu $[a,b]$, kot

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx\,.$$

Površina rotacijskega telesa

Poglejmo najprej še površino plašča prisekanega stožca, ki je enaka

$$P=\pi\,s\,(R+r)\,.$$

Naj bo sedaj D običajna delitev intervala $[a,b]$. Poiščimo površino rotacijskega telesa, ki jo dobimo z vrtenjem poligonske črte. Z vrtenjem posamezne daljice dobimo prisekani stožec (*glej Sliko 2.9*), za katerega je

$$r=f(x_{i-1})\qquad\text{in}\qquad R=f(x_i)\,,$$

s pa je dolžina posamezne daljice

$$s=\overline{T_{i-1}T_i}=d_i\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2},\qquad \xi_i\in(x_{i-1},x_i)\,.$$

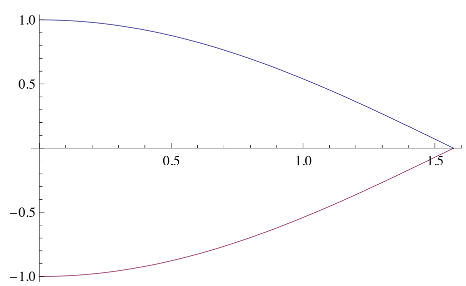
S podobnim sklepanjem kot pri prostornini pridemo do površine telesa, ki ga dobimo z vrtenjem poligonske črte

$$\begin{aligned} P &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}d_i \\ &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n}\pi(f(\xi_i)+f(\xi_i))\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\pi 2f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}d_i \\ &= R_{2\pi f\sqrt{1+f'^2}}(D)\,. \end{aligned}$$

Zato je naravno vpeljati prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$ kot:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Zgled 51. *Izračunajmo prostornino in površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije* $\cos x$ *na intervalu* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *okoli osi* x*.*



Slika 2.10: Rotacijsko telo, določeno z grafom funkcije kosinus.

Na Sliki 2.10 vidimo rotacijsko telo. Izračunajmo njegovo prostornino V:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo še površino P:

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \sin x$ in dobimo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}}\, du\,. \end{aligned}$$

Podoben tip integrala smo obravnavali v Primeru 42. Uporabimo nastavek:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,du &= (A\,u+B)\sqrt{1+u^2}+C\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}\ /' \\
\frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}} &= A\sqrt{1+u^2}+\frac{2(A\,u+B)u}{2\sqrt{1+u^2}}+\frac{C}{\sqrt{1+u^2}}\ /\cdot\ \sqrt{1+u^2} \\
1+u^2 &= 2A\,u^2+B\,u+A+C
\end{aligned}
$$

$$A=C=\frac{1}{2},\ B=0\,.$$

Površina je zato

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}|_0^1+\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}\right) \\
&= \pi\,\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right)|_0^1 \\
&= \pi\,(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\,.
\end{aligned}
$$

Na podoben način lahko izpeljemo prostornino in površino rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije $x=x(y)$ okoli osi y na intervalu $[c,d]$ na osi y

$$V=\int_c^d x^2(y)\,dy \qquad \text{in} \qquad P=2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+(x(y)')^2}\,dy\,.$$

2.5 Numerično integriranje

Numerično integriranje je računanje določenega integrala. Gre za različne metode, ki nam dajo bolj ali manj dober približek določenega integrala in obenem tudi oceno napake. Kadar ne znamo z analitičnimi metodami izračunati določenega integrala, se lahko poslužimo katere od metod numeričnega integriranja. Mi si bomo pogledali tri takšne metode.

Trapezno pravilo

Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[x_0,x_1]$, kjer je $x_1-x_0=h$ in naj bo $f(x_i)=y_i$, $i=0,1$. Tedaj je ploščina pripadajočega krivočrtnega trapeza približno enaka

$$S=\frac{y_0+y_1}{2}\,h\,.$$

Na poljubnem intervalu $[a, b]$ naredimo delitev $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, kjer naj bodo točke ekvidistančne, t.j. $x_i - x_{i-1} = h$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Na vsakem podintervalu uporabimo prejšnjo formulo in zato je določeni integral približno enak

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\doteq \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h \\ &= h\left(\tfrac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{y_n}{2}\right) . \end{aligned}$$

To formulo imenujemo *trapezno pravilo*. Dejansko se da oceniti napako, ki jo pri tem naredimo, vendar imamo za izpeljavo le-te preskromno znanje.

Zgled 52. *Izračunaj* $\int_0^{1.2} \dfrac{dx}{1+x}$ *s trapeznim pravilom, če je korak* $h = 0.1$.

Simpsonovo pravilo

Poleg trapeznega pravila, pri katerem se izkaže da je napaka reda h^3 poznamo še *Simpsonovo pravilo*, katerega napaka je reda h^5. . To pravilo nima geometrijske razlage, zato ga kar navedimo. Naj bodo x_0, x_1, x_2 ekvidistančne točke na razdalji h in naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[x_0, x_2]$. Nadalje naj bo $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$. Tedaj je določeni integral funkcije f na intervalu $[x_0, x_2]$ približno enak

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \doteq \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\,.$$

Naredimo zdaj posplošitev na poljubni interval. Na poljubnem intervalu $[a, b]$ naredimo delitev $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2m}\}$, kjer naj bodo točke ekvidistančne, t.j. $x_i - x_{i-1} = h$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Na vsakem podintervalu $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ uporabimo prejšnjo formulo in zato je določeni integral približno enak

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b f(x)\, dx &\doteq \textstyle\sum_{i=1}^m \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \\ &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right)\,. \end{aligned}$$

To formulo imenujemo *Simpsonovo pravilo.* Tudi v tem primeru se da oceniti napako, a tega z našim znanjem ne moremo izpeljati. Napaka je reda h^5.

Zgled 53. *S Simpsonovim pravilom izračunaj* $\int_0^{1.2} \frac{dx}{1+x}$, *če je korak* $h = 0.1$.

Metoda nedoločenih koeficientov

Osnova za *metodo nedoločenih koeficientov* je naslednja trditev, ki je ne bomo dokazali.

Trditev 2.33. *Če je formula*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$

točna na prostoru polinomov stopnje kvečjemu n, tedaj je to formula za numerično integriranje.

□

Poglejmo si to metodo na primeru.

Zgled 54. *Z metodo nedoločenih koeficientov določi formulo oblike*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{4}\right) + A_2 f(1)\,,$$

ki je točna na prostoru polinomov stopnje kvečjemu dva.

Rešitev: $A_0 = \frac{-3}{18}, A_1 = \frac{8}{9}, A_2 = \frac{5}{18}$.

Zgled 55. *Po formuli za numerično integriranje s Primera 54 izračunaj*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$$

in rezultat primerjaj z eksaktno vrednostjo.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tfrac{x^2}{x^3+1}\,dx &= \tfrac{1}{18}(-3f(0) + 16f(\tfrac{1}{4}) + 5f(1)) \\ &= \tfrac{1}{18}(0 + \tfrac{64}{65} + \tfrac{5}{2}) \\ &= 0.194\,. \end{aligned}$$

Eksaktna vrednost je

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx &= \textstyle\int_1^2 \frac{du}{3u}\\ &= \tfrac{1}{3}\ln\tfrac{2}{1}\\ &= 0.232\,.\end{aligned}$$

Opazimo, da je napaka reda 10^{-1}.

Zgled 56. (a) *Po formuli za numerično integriranje s Primera 54 izračunaj*

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx\,.$$

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx &= \tfrac{1}{18}(-3f(0)+16f(\tfrac{1}{4})+5f(1))\\ &= \tfrac{1}{18}(-3+16e^{\frac{1}{16}}+5e)\\ &= \tfrac{1}{18}(-3+16\cdot 1.065+13.591)\\ &= 1.535\,.\end{aligned}$$

(b) *Integral iz točke (a) je povezan s* funkcijo napake

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}\,dx$$

oziroma imaginarno funkcijo napake

$$erfi(z) = -i\,erf(iz) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{x^2}\,dx$$

ki se pojavi v našem primeru. Te funkcije so neelementarni integrali in so tabelirane:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}erfi(1) \doteq 1.462\,.$$

Primerjava rezultatov iz obeh točk nam pove, da smo naredili napako reda 10^{-1}.

2.6 Posplošeni integral in Eulerjeva funkcija Γ

Pojem določenega integrala na zaprtem intervalu smo uvedli le za funkcije, ki so na tem intervalu omejene. Sedaj bomo ta pojem razširili na dva tipa funkcij in sicer na tiste, ki na zaprtem intervalu niso omejene in na integrale, kjer je integracijski interval neskončen. Takšne integrale imenujemo posplošeni integrali. Spoznali bomo tudi posebni primer posplošenega integrala in sicer Eulerjevo funkcijo Γ.

Integral neomejene funkcije na $[a, b]$

Pojem določenega integrala na $[a, b]$ bomo razširili na primere funkcij, ki v neki točki $c \in [a, b]$ niso definirane. Zanimivi so tisti primeri, kjer ima funkcija v točki c vertikalno asimptoto oz. pol.

Definicija 2.34. *i) Če funkcija f ni definirana v točki $c \in (a, b)$, ampak je za poljubno majhno število $\delta > 0$ integrabilna na intervalih $[a, c-\delta]$ in $[c+\delta, b]$, tedaj je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\,.$$

ii) Če funkcija f ni definirana v točki a, ampak je za poljubno majhno število $\delta > 0$ integrabilna na intervalu $[a+\delta, b]$, tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx\,.$$

iii) Če funkcija f ni definirana v točki b, ampak je za poljubno majhno število $\delta > 0$ integrabilna na intervalu $[a, b-\delta]$, tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx\,.$$

V vseh teh primerih imenujemo integral $\int_a^b f(x)\,dx$ posplošeni integral *funkcije f in le-ta obstaja, če obstajajo ustrezne limite.*

Zgled 57. *Izračunajmo* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Funkcija ima v točki $x = 1$ pol, zato imamo opravka s posplošenim integralom

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ &= -2\lim_{\delta\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\delta} \\ &= -2\lim_{\delta\to 0}(\sqrt{\delta}-1) \\ &= 2\,.\end{aligned}$$

Zgled 58. *Izračunajmo* $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Podobno kot prej, funkcija ni zvezna v točki $x = 1$, zato

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^3\frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \left(\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_0^{1-\delta} + \left(\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_{1+\delta}^3 . \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\delta}-1\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\delta}\right) .\end{aligned}$$

Ker limiti ne obstajata, prav tako ne obstaja posplošeni integral.

Integral funkcije na neomejenem intervalu

Definicija 2.35. *i) Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ za vsak $b \in \mathbb{R}$, $b > a$, tedaj je*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \equiv \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

ii) Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, $a < b$, tedaj je

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \equiv \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

iii) Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ za vsak $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tedaj je

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \equiv \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx\,.$$

Vsi trije integrali so posplošeni integrali *funkcije f, če le obstajajo ustrezne limite.*

Zgled 59. *Izračunajmo posplošena integrala, če le-ta obstajata.*

1. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx \\
&= -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^x}\Big|_0^b \\
&= -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^b}-1\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\ln b \\
&= \infty\,.
\end{aligned}$$

Eulerjeva funkcija Γ

Eulerjevo funkcijo Γ bomo na tem mestu omenili, ker jo bomo potrebovali v naslednjem poglavju o diferencialnih enačbah in je prmer posplošenega integrala.

Definicija 2.36. Eulerjeva funkcija gama *je za* $x > 0$ *definirana kot*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt\,.$$

Eulerjeva funkcija Γ je definirana preko posplošenega integrala, v katerem se pojavi parameter x. Pogoj $x > 0$ kaže na to, da je integral konvergenten za vsak tak x, a konvergence ne bomo dokazovali.

Izračunajmo jo z integracijo po delih:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}\, t^x\, dt \\
& \qquad u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1}\, dt \\
& \qquad dv = e^{-t}\, dt \Rightarrow v = -e^{-t} \\
&= \lim_{b\to\infty} (-e^{-t}t^x)\big|_0^b + x \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\, dt \\
&= 0 + x \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\, dt \\
&= x\,\Gamma(x)\,.
\end{aligned}$$

Izpeljali smo posebno lastnost funkcije gama

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,.$$

V primeru, ko je $x = n$ naravno število, tako velja

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\,.$$

Za zaporednim upoštevanjem te lastnosti, dobimo zanimivo zvezo:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+2) &= (x+1)\Gamma(x+1) = (x+1)x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+3) &= (x+2)\Gamma(x+2) = (x+2)(x+1)x\Gamma(x) \\
&\vdots \\
\Gamma(x+n+1) &= (x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x\Gamma(x)\,.
\end{aligned}$$

Iz te zveze lahko izrazimo funkcijo gama kot

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x}\,.$$

Izraz na desni smemo računati, če je imenovalec različen od 0 in $x+n+1 > 0$. Ker je n poljubno veliko naravno število, sme biti x poljubno veliko negativno necelo število. To pomeni, da smo definicijsko območje funkcije Γ razširili na celo realno os z izjemo števil $0, -1, -2, -3, \ldots$.

Pri uporabi funkcije Γ ima pomembno vlogo vrednost v $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt\,.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $u = t^{\frac{1}{2}}$ prevedemo začetni integral na

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du\,.$$

Spomnimo se funkcije napake

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z} e^{-u^2}\, du\,,$$

torej je

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\infty)\,.$$

Funkcija napake je povezana z verjetnostjo, ki limitira proti vrednosti 1, zato je

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Navadne diferencialne enačbe

V tem poglavju bomo združili znanje iz diferencialnega in integalnega računa. Obravnavali bomo različne vrste diferencialnih enačb, postopke za njihovo reševanje ter pogoje za obstoj rešitve. Z diferencialnimi enačbami modeliramo različne pojave. V kemiji so to, na primer, kemijske reakcije in procesi.

3.1 Osnovni pojmi

Problem diferencialnih enačb se bistveno razlikuje od problema reševanja algebrajskih enačb, zato je prav, da začnemo osnovne pojme in terminologijo spoznavati na motivacijskem primeru.

Poglejmo si matematično modeliranje prostega pada oziroma navpičnega meta.

Opazujmo telo, ki prosto pada ali je bilo vrženo navpično navzgor. Pri tem bomo zanemarili upor zraka. Naj bodo m masa telesa, t čas , $s = s(t)$ višina ob času t, $v = v(t)$ hitrost telesa ob času t, $a = a(t)$ njegov pospešek, g težnostni pospešek ($g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$) in F sila teže. Tedaj velja

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} = s'(t)\,, \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)\,. \end{aligned}$$

Drugi Newtonov zakon pravi, da je sila težnosti enaka produktu mase telesa m in pospeška a

$$F = ma\,.$$

Pri prostem padu na telo z maso m deluje sila teže

$$F = -mg\,.$$

Predznak je negativen, ker sila (in težnostni pospešek) deluje(ta) navzdol. Zato velja

$$-m\,g = m\,a \Rightarrow -g = a\,,$$

kar nam da diferencialno enačbo

$$-g = s''(t)\,.$$

To je najenostavnejši tip diferencialne enačbe. Neznano funkcijo $s = s(t)$ poiščemo z dvakratnim zaporednim integriranjem:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \int (s'(t))'\,dt = \int s''(t)\,dt = \int -g\,dt = -g\,t + C_1\,, \\ s(t) &= \int s'(t)\,dt = \int (-g\,t + C_1)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,. \end{aligned}$$

Iskana funkcija oziroma položaj točke pri metu je določen s

$$s(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\,.$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev $s_0 = s(0)$ in $v_0 = v(0) = s'(0)$ lahko izračunamo konstanti C_1 in C_2, s čimer dobimo

$$s(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0\,,$$

pri čemer je prvi člen prispevek pospešenega gibanja, drugi člen je prispevek enakomernega gibanja z začetno hitrostjo v_0 in tretji člen je začetna višina s_0.

Zgled 60. *Kamen z* 10 *m visokega stolpa vržemo navpično navzgor s hitrostjo* $100\,m/s$*.*

1. *Na kateri višini je kamen po 10 sekundah?*

$$\begin{aligned} s(10) &= -10\tfrac{10^2}{2} + 100 \cdot 10 + 10 \\ &= 510\,m\,. \end{aligned}$$

2. *Kdaj nam kamen pade na glavo?*

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0 \\ 10 &= -\frac{10t^2}{2} + 100t + 10 \\ 0 &= t^2 - 20t \\ t &= 20\,. \end{aligned}$$

3. *Kolikšna je bila maksimalna dosežena višina kamna?*

   Kamen se je nekaj časa dvigal, dokler ni dosegel maksimalne višine, zatem je začel padati. To pomeni, da moramo poiskati lokalni ekstrem funkcije

   $$s(t) = -10\frac{t^2}{2} + 100\,t + 10\,,$$

   ki ga izračunamo iz prvega odvoda funkcije:

   $$\begin{aligned} s'(t) &= -10\,t + 100 = 0 \\ t &= 10\,. \end{aligned}$$

Definicija 3.1. Diferencialna enačba *je enačba, ki vsebuje neodvisno spremenljivko (x), neznano funkcijo (y) ter njene odvode ($y', y'', ..., y^{(n)}$).*

Če je v diferencialni enačbi neznana funkcija odvisna od ene same spremenljivke, je diferencialna enačba *navadna*, sicer je diferencialna enačba *parcialna*. Nas bodo zanimale le *navadne diferencialne enačbe*, parcialne diferencialne enačbe bomo obravnavali pri Matematiki 3.

Stopnja najvišjega odvoda v diferencialni enačbi določa *red diferencialne enačbe*. Enačba

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

je navadna diferencialna enačba n-tega reda. *Rešitev diferencialne enačbe* (na intervalu (a, b)) je vsaka funkcija, ki zadošča diferencialni enačbi (na tem intervalu).

Zgled 61.

1. *Poiščimo rešitev diferencialne enačbe $y' = x$.*

   Rešitev te diferencialne enačbe je oblike $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, kjer je C poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$.

2. *Naj bo dana diferencialna enačba $y'' + y = 2e^x$. Pokaži, da so funkcije*

   $$\begin{aligned} y_1 &= e^x\,, \\ y_2 &= e^x + \cos x\,, \\ y_3 &= e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{aligned}$$

   njene rešitve.

   Za vsak primer posebej izračunamo drugi odvod in ga prištejemo funkciji. Funkcija y_3 je najbolj splošna rešitev diferencialne enačbe in vsebuje prvi dve rešitvi.

Zgled 62. *1. Pokažimo, da je funkcija* $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ *rešitev diferencialne enačbe* $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$ *za vsak* $x > 0$*.*

Izračunajmo najprej oba odvoda

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \\ y''(x) &= \frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

ter vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} 4x^2\tfrac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}} - 12x\tfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} &= 0 \\ 15x^{-\frac{3}{2}} - 18x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} &= 0 \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Preverili smo, da je funkcija $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ res rešitev diferencialne enačbe $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$, vendar zaradi definiranosti rešitve le-ta obstaja le na intervalu $(0, \infty)$.

2. Pokažimo, da so tudi funkcije $y_1(x) = 3x^{\frac{1}{2}}, y_2(x) = 8x^{-\frac{3}{2}}, y_3(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + 8x^{-\frac{3}{2}}$*.*

Bralec naj sam, na enak način kot prvi primer preveri, da so vse tri funkcije res rešitve diferencialne enačbe.

Konstante v rešitvi diferencialne enačbe imenujemo *parametri*. Pravimo, da rešitve sestavljajo *parametrično družino funkcij*, ki jo imenujemo *splošna rešitev* diferencialne enačbe. Za konkretno vrednost konstant dobimo *posebno* ali *partikularno rešitev*. Partikularna rešitev je lahko določena z zahtevo, naj ima rešitev y v izbranih točkah x_i vrednost y_i. Zahtevam $y(x_i) = y_i$ pravimo *začetni pogoji* diferencialne enačbe. Vseeno pa splošna rešitev v nekaterih primerih ne zajema vseh rešitev dane diferencialne enačbe, kar bomo videli v nadaljevanju. Diferencialni enačbi,skupaj z danimi začetnimi pogoji (število le-teh mora sovpadati z redom diferencialne enačbe), pravimo *začetni problem*.

Vprašajmo se sedaj obratno, ali je lahko dana parametrična družina funkcij rešitev neke diferencialne enačbe.

Zgled 63. *Naj bo dana dvoparametrična družina funkcij* $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$*,* $A, B \in \mathbb{R}$*. Preverimo, ali je* y *rešitev kakšne diferencialne enačbe.*

Izračunajmo prva dva odvoda funkcije y:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x}\,, \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} + 9Be^{-3x}\,. \end{aligned}$$

Sistem rešimo glede na neznanki A in B. Rešitev vstavimo v $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ in dobimo

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0\,.$$

Ob predpostavki, da je družina funkcija y vsaj dvakrat odvedljiva smo našli diferencialno enačbo, katere rešitev je funkcija y.

Poglejmo si geometrijsko interpretacijo rešitev diferencialne enačbe. Začnimo s konkretnim primerom.

Naj bo dana diferencialna enačba prvega reda

$$y' = y\,.$$

Rešitev dobimo z nedoločenim integriranejem

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int y(x)\,dx \Rightarrow y(x) = C\,e^x\,, C \in \mathbb{R}\,.$$

Izberimo nekaj konkretnih vrednosti za konstanto $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ in 3 in poglejmo pripadajoče rešitve diferencialne enačbe:

$$-3\,e^x\,,\ -2\,e^x\,,\ -e^x\,,\ 0\,,\ e^x\,,\ 2\,e^x\,, \quad \text{in} \quad 3\,e^x\,.$$

Njihovi grafi so na Sliki 3.11.

S predpisom

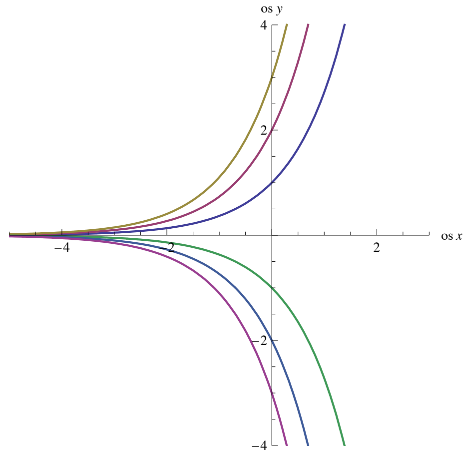
$$y(x) = C\,e^x$$

je podana enoparametrična družina rešitev diferencialne enačbe $y' = y$.

Poglejmo na ta primer malo drugače in sicer je z

$$y' = y$$

določen odvod v poljubni točki, torej je smerni koeficient tangente k v tem primeru enak y. Krivulje, določene s $k = y$ imenujemo *izokline*.
Izberimo si ponovno nekaj konkretnih vrednosti, tokrat za smerni koeficient $k = -3, -2, ..., 2$ in 3. Na vsako izoklino $k = y$ narišemo odseke tangent, katerih smerni koeficient je k. Daljice nam predstavljajo potek rešitev diferencialne enačbe, kar vidimo na Sliki 3.12.



Slika 3.11: Rešitve diferencialne enačbe $y' = y$.

Poglejmo še vse skupaj za poljubno diferencialno enačbo prvega reda. Diferencialno enačbo

$$F(x, y, y') = 0$$

zapišemo v eksplicitni obliki

$$y' = f(x, y)\,.$$

S tem dobimo formulo za računanje odvoda v točki $(x_0, y(x_0) = y_0)$. Ta odvod določa smer tangente na tisto rešitev diferencialne enačbe v točki (x_0, y_0), za katero je $y' = f(x_0, y_0)$. Pravimo, da je s predpisom

$$y' = f(x, y)$$

določeno *smerno polje*. Definirajmo izokline v splošnem.

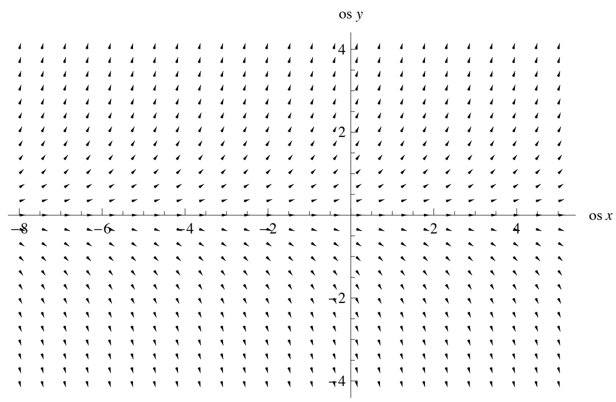
Definicija 3.2. Izokline *diferencialne enačbe* $y' = f(x, y)$ *so krivulje, podane s enačbami* $f(x, y) = k$*, kjer* $k \in \mathbb{R}$*.*

Vsaka rešitev diferencialne enačbe, ki seka izoklino $f(x, y) = k$, ima v presečišču tangento s smernim koeficientom k.

Zgled 64. *Narišimo smerno polje diferencialne enačbe*

$$y' - x\,y = 0\,.$$

Najprej izrazimo $y' = xy$. Smerno polje vidimo na Sliki 3.13.



Slika 3.12: Smerno polje diferencialne enačbe $y' = y$.

Izpeljemo lahko preprosto numerično metodo za iskanje približka rešitve diferencialne enačbe.

Naj bo (x_0, y_0) začetna točka, ki pripada neki rešitvi diferencialne enačbe. Tedaj je

$$k_0 = f(x_0, y_0)\,.$$

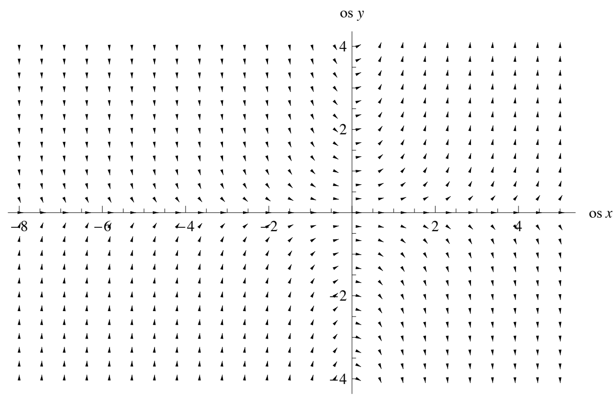
Nadalje naj bo

$$x_1 = x_0 + h\,,$$

ter poiščimo pripadajoči y_1 in sicer velja

$$y_1 = y_0 + y'(x_0)\,h = y_0 + k_0\,h = y_0 + f(x_0, y_0)\,h\,.$$

Postopek ponavljamo in skozi dobljene točke interpoliramo funkcijo. To metodo imenujemo *Eulerjeva numerična metoda*:



Slika 3.13: Smerno polje diferencialne enačbe $y' = xy$.

$$
\begin{aligned}
(x_0, y_0) &\ \dots \ \text{začetna} \quad \text{točka} \\
x_{r+1} &= x_r + h \\
y_{r+1} &= y_r + f(x_r, y_r)\, h\,,\ r = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}
$$

Zgled 65. *Z Eulerjevo numerično metodo poiščimo rešitev diferencialne enačbe* $y' = x\,y$*, če je* $y(0) = 1$ *in je korak* $h = 0.2$*.*

Začetna točka je $x_0 = 0$ in $y_0 = 1$. Ker je $f(x, y) = xy$, računamo naslednje točke za $r = 0, ..., 4$ po formulah

$$
\begin{aligned}
x_{r+1} &= x_r + 0.2 \\
y_{r+1} &= y_r + 0.2\, x_r\, y_r\,.
\end{aligned}
$$

Dobimo tabelo točk

$$\begin{aligned}&(0, 1)\,,\\&(0.2, 1)\,,\\&(0.4, 1.04)\,,\\&(0.6, 1.1232)\,,\\&(0.8, 1.2580)\,,\\&(1, 1.4593)\,.\end{aligned}$$

3.2 Diferencialne enačbe prvega reda

V tem razdelku bomo obravnavali diferencialne enačbe, ki vsebujejo samo prvi odvod neznane funkcije.

Splošna oblika diferencialne enačbe prvega reda je

$$F(x, y, y') = 0\,.$$

Poglejmo različne tipe diferencialnih enačb prvega reda.

DIFERENCIALNE ENAČBE Z LOČLJIVIMA SPREMENLJIVKAMA:

$$y' = f(x)g(y)\,.$$

Pri tem sta $f(x)$ in $g(y)$ poljubni zvezni funkciji. Upoštevamo $y' = \dfrac{dy}{dx}$ in integriramo:

$$\begin{aligned}y' &= f(x)g(y)\\ \tfrac{dy}{g(y)} &= f(x)dx\\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \textstyle\int f(x)dx\,.\end{aligned}$$

Zgled 66. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = y\cos x$.*

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int \cos x\, dx\\ \ln y &= \sin x + D\\ y &= e^{\sin x + \ln D}\\ y &= Ce^{\sin x}\,.\end{aligned}$$

Zgled 67. *Masa snovi m se pri radioaktivnem razpadu spreminja v skladu z diferencialno enačbo*

$$dm = -\beta m\, dt\,,$$

kjer je t čas razpada, β pa koeficient, odvisen od snovi.

1. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe.*

$$\begin{aligned} dm &= -\beta m\, dt \\ \int \tfrac{dm}{m} &= -\beta \int dt \\ \ln m &= -\beta t + D \\ m &= e^{-\beta t + \ln C} \\ m &= Ce^{-\beta t}\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je torej $m(t) = Ce^{-\beta t}$.

2. *Poiščimo partikularno rešitev pri začetnem pogoju $m(0) = m_0$.*

$$\begin{aligned} m_0 &= m(0) = Ce^{-\beta\, 0} = C \quad \textit{in} \\ m(t) &= m_0 e^{-\beta t}\,. \end{aligned}$$

3. *Poiščimo razpolovni čas T glede na začetni pogoj iz točke b).*

Ker je T razpolovni čas, velja $m(T) = \frac{1}{2}m_0$.

$$\begin{aligned} m(T) \;=\; m_0 e^{-\beta T} &= \frac{1}{2}\, m_0 \\ e^{-\beta T} &= \frac{1}{2} \\ -\beta T &= \ln \tfrac{1}{2} \\ T &= \frac{-\ln \frac{1}{2}}{\beta} = \frac{\ln 2}{\beta}\,. \end{aligned}$$

Homogena diferencialna enačba:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \dfrac{y}{x}$ oziroma $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Tedaj je $y(x) = u(x)x$ in $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ oziroma krajše $y' = u'x + u$.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Iz} & y' & = & f\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{sledi} \\
 & u'x + u & = & f(u) & \\
 & \dfrac{du}{dx}x & = & f(u) - u & \\
 & \dfrac{du}{f(u) - u} & = & \dfrac{dx}{x}\,. &
\end{array}
$$

Dobili smo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama, ki jo načeloma znamo rešiti.

Zgled 68. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe* $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Preoblikujmo diferencialno enačbo:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\,.$$

Vpeljimo $u = \dfrac{y}{x}$ in upoštevamo $y' = u'x+u$, s čimer dobimo novo diferencialno enačbo, ki je tipa z ločljivima spremenljivkama:

$$\begin{aligned}
u'x + u &= \frac{1+u}{1-u} \\
\frac{du}{dx}x &= \frac{1+u}{1-u} - u \\
\frac{du}{dx}x &= \frac{1+u^2}{1-u} \\
\int \frac{1-u}{1+u^2} &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{1}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2} &= \int \frac{dx}{x} \\
\mathrm{atan} u - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) &= \ln x + C \\
\mathrm{atan}\frac{y}{x} &= \ln\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \ln x + C \\
\mathrm{atan}\frac{y}{x} &= \ln(\sqrt{\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2}} + C \\
\mathrm{atan}\frac{y}{x} &= \ln\sqrt{x^2+y^2} + C\,.
\end{aligned}$$

Linearna diferencialna enačba prvega reda:

$$y' + f(x)y = g(x)\,.$$

Tu sta f in g poljubni zvezni funkciji. Obravnavajmo najprej primer, ko je $g(x) \equiv 0$. Dobimo diferencialno enačbo

$$y' + f(x)y = 0\,,$$

ki jo imenujemo *homogena linearna diferencialna enačba.* To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama, ki jo znamo rešiti:

$$\begin{aligned}
y' &= -f(x)y \\
\tfrac{dy}{y} &= -f(x)dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\textstyle\int f(x)\,dx \\
\ln y &= -F(x) + D \\
y &= e^{-F(x)+\ln C} \\
y &= Ce^{-F(x)}\,.
\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela bomo označili z y_H:

$$y_H = Ce^{-F(x)}\,,$$

kjer je $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Zanima nas, kako bi poiskali splošno rešitev originalne linearne diferencialne enačbe. V ta namen si poglejmo naslednji izrek, ki velja tudi za diferencialne enačbe višjega reda.

Izrek 3.3. *Če je y_P kakšna partikularna rešitev linearne diferencialne enačbe in je y_H rešitev pripadajoče homogene linearne diferencialne enačbe. Potem je funkcija*

$$y = y_P + y_H$$

tudi rešitev linearne diferencialne enačbe.

Dokaz.

Vstavimo funkcijo $y = y_P + y_H$ v levo stran linearne diferencialne enačbe $y' + f(x)y = g(x)$:

$$\begin{aligned}
y' + f(x)y &= (y_P' + y_H') + f(x)(y_P + y_H) \\
&= (y_P' + f(x)y_P) + (y_H' + f(x)y_H) \\
&= g(x) + 0 = g(x)\,.
\end{aligned}$$

∎

Obliko partikularne rešitve lahko večkrat uganemo na osnovi oblike funkcije g in v ta namen uporabimo različne nastavke. Poglejmo si primer.

Zgled 69. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$y' + 2y = 4x^2 .$$

Rešimo najprej homogeni del:

$$y' + 2y = 0 .$$

$$\begin{aligned} y' &= -2y \\ \tfrac{dy}{y} &= -2dx \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int dx \\ \ln y &= -2x + \ln C \\ y_H &= Ce^{-2x} . \end{aligned}$$

Partikularno rešitev poskusimo poiskati z nastavkom $y_P = ax^2 + bx + c$. Tedaj je $y_P' = 2ax + b$. Vstavimo v diferencialno enačbo:

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2$$

$$\begin{aligned} &2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ &a + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ &b + 2c = 0 \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

$$y_P = 2x^2 - 2x + 1 .$$

Splošna rešitev je

$$y = y_P + y_H = 2x^2 - 2x + 1 + Ce^{-2x} .$$

Namesto ugibanja lahko za iskanje neke partikularne rešitve y_P linearne diferencialne enačbe uporabimo metodo *variacije konstant*.

Uporabimo nastavek

$$y_P = C(x)y_{H,1} ,$$

kjer je $y_{H,1}$ partikularna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe za $C = 1$, torej $y_{H,1} = e^{-F(x)}$. Torej je nastavek

$$y_P = C(x)e^{-F(x)} ,$$

kjer je $F(x) = \int f(x)\,dx$. V bistvu v splošni rešitvi homogene linearne diferencialne enačbe zamenjamo konstanto C z neznano funkcijo $C(x)$. Funkcijo $C(x)$ bomo določili tako, da bo y_P partikularna rešitev linearne diferencialne enačbe. Nastavek vstavimo v originalno linearno diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned}
C'(x)y_{H,1} + C(x)y'_{H,1} + f(x)C(x)y_{H,1} &= g(x) \\
C'(x)y_{H,1} + C(x)\underbrace{\left[y'_{H,1} + f(x)y_{H,1}\right]}_{0} &= g(x) \\
C'(x) &= \frac{g(x)}{y_{H,1}} \\
C'(x) &= g(x)e^{F(x)}
\end{aligned}$$

in zato

$$C(x) = \int g(x)e^{F(x)}\,dx\,.$$

Torej je

$$y_P = y_{H,1}\int g(x)e^{F(x)}\,dx = e^{-F(x)}\int g(x)e^{F(x)}\,dx$$

iskana partikularna rešitev, splošna rešitev linearne diferencialne enačbe pa je

$$y = a_H + y_P = e^{-F(x)}\int g(x)e^{F(x)}\,dx + Ce^{-F(x)}\,.$$

Zgled 70. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$xy' + y = 1 + \ln x\,.$$

Najprej poiščimo rešitev homogenega dela y_H

$$\begin{aligned}
xy' &= -y \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\
\ln y &= -\ln x + C \\
y &= x^{-1}\underbrace{e^C}_{D} \\
y_H &= \frac{D}{x}\,.
\end{aligned}$$

Z metodo variacije konstant poiščimo še partikularno rešitev y_P

$$
\begin{aligned}
y_P &= \frac{D(x)}{x} \\
y_P' &= \frac{D'(x)x - D(x)}{x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$
\begin{aligned}
x\frac{D'(x)x - D(x)}{x^2} + \frac{D(x)}{x} &= 1 + \ln x \\
D'(x) &= 1 + \ln x \\
D(x) &= \int (1 + \ln x)\, dx
\end{aligned}
$$

$$D(x) = x\,\ln x$$

$$y_P = \ln x\,.$$

Skupna rešitev je

$$y = y_H + y_P = \frac{D}{x} + \ln x\,.$$

Bernoullijeva diferencialna enačba:

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}\,.$$

Tu sta $f(x)$ in $g(x)$ zvezni funkciji, pri čemer je $g(x) \neq 0$. Za $\alpha = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $\alpha = 1$ pa homogeno linearno diferencialno enačbo, zato privzamimo, da je α različen od 0 in 1.

Delimo diferencialne enačbe z y^{α}:

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$$

in vpeljimo novo spremenljivko $z = y^{1-\alpha}$, kjer je $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x)$$

oziroma

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x)\,.$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo za neznano funkcijo z. Po prejšnji metodi jo rešimo in nato upoštevamo povezavo med y in z.

Zgled 71. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$xy^2y' + y^3 = x\cos x\,.$$

Delimo enačbo z xy^2

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= \frac{\cos x}{y^2} \\ y' + \frac{y}{x} &= \cos x\, y^{-2}\,, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je to Bernoullijeva diferencialna enačba za $\alpha = -2$. Delimo jo z y^{-2}, kar je ekvivalentno množenju z y^2

$$y'y^2 + \frac{y^3}{x} = \cos x\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $z = y^{1-(-2)} = y^3$, katere odvod je $z' = 3y^2y'$ in vstavimo

$$\begin{aligned} \frac{z'}{3} + \frac{z}{x} &= \cos x \\ z' + \frac{3z}{x} &= 3\cos x\,. \end{aligned}$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo in najprej poiščimo rešitev homogenega dela z_H

$$\begin{aligned} z' + \frac{3z}{x} &= 0 \\ \frac{dz}{z} &= -3\frac{dx}{x} \\ \ln z &= -3\ln x + C \\ z &= x^{-3}\underbrace{e^C}_{D} \\ z_H &= D\,x^{-3}\,. \end{aligned}$$

Z metodo variacije konstant poiščimo partikularno rešitev z_P

$$\begin{aligned} z_P &= D(x)\,x^{-3} \\ z_P' &= D'(x)\,x^{-3} - 3D(x)x^{-4}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} D'(x)\,x^{-3} - 3D(x)x^{-4} + \frac{3D(x)\,x^{-3}}{x} &= 3\cos x \\ D'(x) &= 3\cos x\,x^3 \\ D(x) &= \int 3\cos x\,x^3\,dx \\ D(x) &= 3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)\,. \end{aligned}$$

Nedoločeni integral izračunamo s trikratno uporabo integracije po delih, a smo podrobnosti izpustili. Partikularna rešitev je

$$z_P = \frac{3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)}{x^3}\,.$$

Skupna rešitev je

$$\begin{aligned} z &= z_H + z_P \\ &= \frac{D}{x^3} + \frac{3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)}{x^3} \\ &= \frac{D + 3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)}{x^3}\,. \end{aligned}$$

Upoštevamo še zvezo med y in z

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\frac{D + 3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)}{x^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{D + 3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)}}{x}\,. \end{aligned}$$

Riccatijeva diferencialna enačba:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)\,.$$

Tu so $a(x), b(x), c(x)$ zvezne funkcije. Za $a(x) = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $c(x) = 0$ pa Bernoullijevo diferencialno enačbo.

Žal ne obstaja metoda, ki bi dala splošno rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe.

Izrek 3.4. *Če je y_1 kakšna partikularna rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe, tedaj lahko poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe v obliki*

$$y_1 + z\,,$$

kjer je z neznana funkcija.

Dokaz. Ker je y_1 partikularna rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe, velja

$$y_1' = a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)\,.$$

Pokažimo, da je tedaj tudi $y_1 + z$ rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned}
y_1' + z' &= a(x)(y_1+z)^2 + b(x)(y_1+z) + c(x)\\
y_1' + z' &= a(x)(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + b(x)(y_1+z) + c(x)\\
y_1' + z' &= \underbrace{a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)}_{y_1'}\\
&\quad +2a(x)y_1 z + a(x)z^2 + b(x)z\\
z' &= (2a(x)y_1 + b(x))z + a(x)z^2\,.
\end{aligned}$$

Dobimo Bernoullijevo diferencialno enačbo za $\alpha = 2$

$$z' - (2a(x)y_1 + b(x))z = a(x)z^2\,.$$

∎

Zgled 72. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$xy' = y^2 - 2(1+x)y + x^2 + 3x\,,$$

če je $y_1 = x$ partikularna rešitev.

Vpeljemo novo spremenljivko $y = x + z$, katere odvod je $y' = 1 + z'$. Opomnimo samo, da je odvod posledica dejstva, da sta y in z funkciji, odvisni od neodvisne spremenljivke x. Vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}
x(1+z') &= (x+z)^2 - 2(1+x)(x+z) + x^2 + 3x\\
x\,z' &= z^2 - 2z\,.
\end{aligned}$$

Dobili smo Bernoullijevo diferencialno enačbo za $\alpha = 2$. Množimo jo z z^{-2}

$$x\,z'\,z^{-2} \;=\; 1 - 2\,z^{-1}\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = z^{1-2} = z^{-1}$, katere odvod je $u' = -z^{-2}z'$ in vstavimo

$$-x\,u' = 1 - 2u\,.$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo in najprej poiščimo rešitev homogenega dela u_H

$$\begin{aligned}
-x\,u' &= -2u \\
\frac{du}{u} &= 2\frac{dx}{x} \\
\ln u &= 2\ln x + C \\
u_H &= D\,x^2\,.
\end{aligned}$$

Z metodo variacije konstant poiščimo partikularno rešitev u_P

$$\begin{aligned}
u_P &= D(x)\,x^2 \\
u'_P &= D'(x)\,x^2 + 2D(x)\,x\,.
\end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}
-x(D'(x)\,x^2 + 2D(x)\,x) &= 1 - 2D(x)\,x^2 \\
D'(x) &= -x^{-3} \\
D(x) &= \int -x^{-3}\,dx \\
D(x) &= \frac{x^{-2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$u_P = \frac{1}{2}\,.$$

Skupna rešitev je

$$\begin{aligned}
u &= u_H + u_P \\
&= Dx^2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2Dx^2 + 1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Upoštevamo najprej zvezo med z in u

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{u} \\
&= \frac{2}{2Dx^2 + 1}
\end{aligned}$$

in zatem še zvezo med y in z

$$\begin{aligned} y &= x + z \\ &= x + \frac{2}{2Dx^2 + 1} \, . \end{aligned}$$

Clairautova diferencialna enačba:

$$y = xy' + \varphi(y') \, .$$

Izračunajmo odvod dane diferencialne enačbe

$$y' = y' + xy'' + \varphi'(y')y''$$

in naj bo $\varphi' = \psi$, torej

$$0 = xy'' + \psi(y')y''$$

oziroma

$$0 = y''(x + \psi(y')) \, .$$

Zgornja enačba ima rešitev takrat, ko je eden od faktorjev enak 0. Tako je prva možnost

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C$$

in v tem primeru je rešitev diferencialne enačbe

$$y = C\,x + \varphi(C) \, ,$$

kar je enoparametrična družina rešitev (premic) in je tako tudi splošna rešitev Clairautove diferencialne enačbe.

Druga možnost je, da je

$$x + \psi(y') = 0 \, .$$

Vpeljimo v to diferencialno enačbo parameter $t = y'$. S tem dobimo parametrično podano rešitev diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} x(t) &= -\psi(t) \\ y(t) &= xt + \varphi(t) \, . \end{aligned}$$

Z eliminacijo parametra t dobimo eksplicitno podano rešitev diferencialne enačbe, če se to da narediti. To je rešitev, ki je ne zajema splošna rešitev diferencialne enačbe in jo zato imenujemo *singularna rešitev*. Če pišemo $t = C$, opazimo, da je ta rešitev ravno odvod splošne rešitve po parametru C. Na tak način dobimo postopek za iskanje singularne rešitve Clairautove diferencialne enačbe, torej, splošno rešitev $y = C\,x + \varphi(C)$ odvajamo po C, s čimer dobimo $0 = x + \varphi'(C)$ in iz obeh tako dobljenih enačb eliminiramo C.

Zgled 73. *Reši Clairautovo diferencialno enačbo*

$$y = xy' + {y'}^2 .$$

V tem primeru je $\varphi(y') = y'^2$, zato je splošna rešitev

$$y = C\,x + C^2 .$$

Singularno rešitev dobimom z odvajanjem po C

$$0 = x + 2C .$$

Rešimo sistem enačb

$$y = -\frac{x^2}{4} .$$

Sigularna rešitev je tako parabola, vsaka tangenta na parabolo ($y' = C = -\frac{x}{2}$) pa je partikularna rešitev.

Lagrangeova diferencialna enačba:

$$y = x\psi(y') + \varphi(y') .$$

V primeru, ko je $\psi(y') = y'$, dobimo Clairautovo diferencialno enačbo, zato naj bo $\psi(y') \neq y'$. Rešitev bomo poiskali v obliki $x = x(t)$, $y = y(t)$, pri čemer je $y'(x) = t$.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\psi(t) + \varphi(t) \\ y'(t) &= x'(t)\psi(t) + x(t)\psi'(t) + \varphi'(t) \end{aligned}$$

Nadalje, iz

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'(x)x'(t) = tx'(t)$$

dobimo

$$\begin{aligned} tx'(t) &= x'(t)\psi(t) + x(t)\psi'(t) + \varphi'(t) \\ x'(t)(t - \psi(t)) &= x(t)\psi'(t) + \varphi'(t) , \end{aligned}$$

ki je linearna diferencialna enačba za $x = x(t)$ in jo seveda znamo rešiti.

Zgled 74. *Reši Lagrangeovo diferencialno enačbo*

$$y = xy'^2 + {y'}^2 .$$

Z vpeljavo $t = y'$ dobimo

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)t^2 + t^2 \\ y'(t) &= x'(t)t^2 + x(t)2t + 2t \\ tx'(t) &= x'(t)t^2 + x(t)2t + 2t \\ x'(t)(1-t) &= 2x(t) + 2,\ t \neq 0\,. \end{aligned}$$

Za $t = 0$ dobimo rešitev $y' = 0$, kar pomeni, da je $y = C$. Če pogledamo začetno diferencialno enačbo vidimo, da zadošča le $y = 0$, ki je singularna rešitev. Za splošno rešitev moramo najprej rešiti linearno diferencialno enačbo za $x = x(t)$, katere rešitev je

$$x(t) = -1 + \frac{C}{(t-1)^2}$$

in posledično

$$y(t) = \frac{Ct^2}{(t-1)^2}\,.$$

Z nekaj dela nam uspe eliminirati parameter t in dobimo splošno rešitev Lagrangeove diferencialne enačbe

$$y(x) = (\sqrt{C} + \sqrt{x+1})^2,\ C \geq 0\,.$$

3.3 Linearne diferencialne enačbe višjega reda

Sedaj nas zanimajo diferencialne enačbe, ki poleg prvega vsebujejo tudi višje odvode neznane funkcije.

Splošna oblika diferencialne enačbe n-tega reda je

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Nas bodo zanimale le linearne diferencialne enačbe n-tega reda

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x). \tag{3.14}$$

B.š.z.s. (brez škode za splošnost) lahko predpostavimo, da je funkcija pred $y^(n)$ enaka ena. Pri tem naj bodo $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ in $f(x)$ zvezne funkcije. Če postavimo, da je $f(x) = 0$, iz (3.14) dobimo pripadajočo homogeno enačbo:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0. \tag{3.15}$$

Izrek 3.5. *Če so funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda* (3.15) *ter $C_1, C_2, \ldots, C_n$ poljubne konstante, tedaj je tudi funkcija*

$$y_H = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n$$

rešitev diferencialne enačbe (3.15).

Dokaz. Ker so y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ rešitve diferencialne enačbe (3.15), za vsak i velja

$$y_i^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_i^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y_i' + a_0(x)\, y_i = 0\,.$$

Poljuben (k-ti) odvod funkcije y_H je enak

$$y_H^{(k)} = C_1\, y_1^{(k)} + C_2\, y_2^{(k)} + \cdots + C_n\, y_n^{(k)}\,.$$

Vstavimo v (3.15):

$$\begin{aligned}(C_1\, y_1^{(n)} + C_2\, y_2^{(n)} + \cdots + C_n\, y_n^{(n)}) +& \\ a_{n-1}(x)(C_1\, y_1^{(n-1)} + C_2\, y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n\, y_n^{(n-1)}) + \cdots +& \\ a_0(x)(C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n) &= 0\,.\end{aligned}$$

Uredimo in upoštevamo da so funkcije y_i rešitve diferencialne enačbe (3.15)

$$\begin{aligned}C_1(\underbrace{y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y_1' + a_0(x)\, y_1}_{0}) +& \\ C_2(\underbrace{y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y_2' + a_0(x)\, y_2}_{0}) + \cdots +& \\ C_n(\underbrace{y_n^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_n^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y_n' + a_0(x)\, y_n}_{0}) &= 0\,.\end{aligned}$$

∎

Zanima nas, ali je to tudi splošna rešitev diferencialne enačbe (3.15). Dajmo se za začetek omejiti na linearne diferencialne enačbe drugega reda. Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi njenega homogenega dela in recimo, da velja $y_2 = k\, y_1$, $k \in \mathbb{R}$. V tem primeru rečemo, da sta y_1 in y_2 linearno odvisni funkciji. Tedaj

$$C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = C_1\, y_1 + C_2\, k\, y_1 = D\, y_1\,.$$

Namesto dvoparametrične družine rešitev dobimo enoparametrično, zato $C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ v tem primeru ni splošna rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda. Če želimo splošno rešitev, rešitvi ne smeta biti linearno odvisni, temveč linearno neodvisni.

Pojem linearne neodvisnosti lahko posplošimo. Naj bodo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda. Linearno neodvisnost podaja naslednja definicija.

Definicija 3.6. *Funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so* linearno neodvisne, *ko velja:*

$$C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0\,.$$

Več o linearni neodvisnosti bomo izvedeli pri predmetu Matematika III.

Izrek 3.7. *Če so funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno neodvisne rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda ter $C_1, C_2, \ldots, C_n$ poljubne konstante, tedaj je*

$$y_H = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n$$

splošna rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe.

Izrek 3.8. *Če je y_P neka rešitev linearne diferencialne enačbe n-tega reda in y_H splošna rešitev njenega homogenega dela, tedaj je*

$$y = y_H + y_P$$

splošna rešitev linearne diferencialne enačbe n-tega reda.

Dokaz. Upoštevamo $y = y_H + y_P$ v diferencialni enačbi

$$\begin{aligned} (y_H + y_P)^{(n)} + a_{n-1}(x)\,(y_H + y_P)^{(n-1)} + \cdots + \\ a_1(x)\,(y_H + y_P)' + a_0(x)\,(y_H + y_P) &= f(x) \\ \underbrace{y_H^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_H^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y_H' + a_0(x)\, y_H}_{0} + \\ \underbrace{y_P^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y_P^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y_P' + a_0(x)\, y_P}_{f(x)} &= f(x)\,. \end{aligned}$$

∎

Poglejmo najprej, kako poiščemo partikularno rešitev y_P linearne diferencialne enačbe n-tega reda. Uporabimo enako metodo kot pri linearni diferencialni enačbi prvega reda, in sicer metodo variacije konstant. V splošni rešitvi homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda $y_H = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + \cdots + C_n\,y_n$ zamenjamo konstante C_i z neznanimi funkcijami funkcijami $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Partikularno rešitev tako iščemo s pomočjo nastavka

$$y_P = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)\,y_n\,.$$

Izračunajmo najprej prvi odvod:

$$y_P' = C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2' + \cdots + C_n(x)y_n' + C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n\,.$$

Če bomo tako nadaljevali in računali nadaljnje odvode od y_P, bo vsa stvar začela nekontrolirano naraščati. Ker nas zanimajo le neznane funkcije $C_i(x)$, dajmo predpostaviti, da je

$$C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0\,.$$

To je smiselno narediti, saj vse, kar potrebujemo za določitev neznanih funkcij $C_i(x)$, je sistem enačb z n neznankami, ki bo imel enolično rešitev. Nadaljujmo sedaj z računanjem drugega odvoda:

$$y_P'' = C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'' + \cdots + C_n(x)y_n'' + C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n'\,.$$

Naredimo enako kot prej in predpostavimo

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0\,.$$

S tem postopkom nadaljujemo in tako je n-ti odvod enak:

$$\begin{aligned} y_P^{(n)} &= C_1(x)\,y_1^{(n)} + C_2(x)\,y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)} + \\ &\quad C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\,. \end{aligned}$$

Zdaj ne bomo naredili nobene predpostavke, ampak vstavimo vse izračunane odvode v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} f(x) &= y_P^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y_P^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y_P' + a_0(x)\,y_P \\ &= \Big[C_1(x)\,y_1^{(n)} + C_2(x)\,y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)} + \\ &\quad C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\Big] + \\ &\quad a_{n-1}(x)\ \Big[C_1(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}\Big] + \cdots + \\ &\quad a_0(x)\ \left[C_1(x)\,y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)\,y_n\right]\,. \end{aligned}$$

Preuredimo glede na neznanke in dobimo

$$\begin{aligned}
f(x) &= C_1(x)\underbrace{\left(y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y_1' + a_0(x)\,y_1\right)}_{0} + \\
&\quad C_2(x)\underbrace{\left(y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y_2' + a_0(x)\,y_2\right)}_{0} + \cdots + \\
&\quad C_n(x)\underbrace{\left(y_n^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y_n^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y_n' + a_0(x)\,y_n\right)}_{0} + \\
&\quad \left(C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

Dobili smo še zadnji pogoj

$$C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)\,.$$

Variacija konstant da sistem n enačb za n neznanih funkcij $C_i'(x)$

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \cdots + C_n'(x)\,y_n &= 0 \\
C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
C_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} &= 0 \\
C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}$$

Zaradi preskromnega poznavanja reševanja sistemov linearnih enačb ne moremo pokazati, da je ta sistem res enolično rešljiv. To je posledica dejstva, da so rešitve y_i, $i = 1, \ldots, n$, linearno neodvisne. Ko rešimo sistem glede na neznanke $C_i'(x)$, nato z nedoločenim integriranjem dobimo neznane funkcije $C_i(x)$. Te funkcije vstavimo v nastavek

$$y_P = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)\,y_n\,,$$

s čimer dobimo partikularno rešitev linearne diferencialne enačbe n-tega reda.

Bolj problematično je iskanje rešitev $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda. Žal ni splošne metode, ki bi rešila ta problem. V ta namen se bomo sedaj omejili na linearne diferencialne enačbe, kjer so funkcije $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, konstante. Imenujemo jih *linearne diferencialne enačbe n-tega reda s konstantnimi koeficienti.*

3.4 Linearne diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti

Poglejmo si najprej linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)\,,$$

pri čemer sta sedaj koeficienta a_1 in a_0 realni števili, torej konstanti. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je koeficient pred y'' enak 1, saj v nasprotnem celo enačbo delimo z njim.

Rešitve njenega homogenega dela

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

iščemo med funkcijami oblike $e^{\lambda x}$, kjer je λ neznani koeficient:

$$y = e^{\lambda x}$$

$$y' = \lambda\, e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{kx} + a_1 \lambda e^{kx} + a_0 e^{kx} = 0$$

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) e^{kx} = 0$$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0\,.$$

Polinom $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ imenujemo *karakteristični polinom*. Če sta λ_1 in λ_2 ničli karakterističnega polinoma, tedaj sta $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rešitvi homogenega dela diferencialne enačbe.

Glede na vrsto ničel karakterističnega polinoma ločimo tri možnosti.

(i) Ničli λ_1 in λ_2 sta realni in različni.

Rešitvi homogenega dela diferencialne enačbe sta potemtakem $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Če hočemo, da bo

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

splošna rešitev homogenega dela diferencialne enačbe, morata biti y_1 in y_2 linearno neodvisni funkciji. Njun kvocient

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

je eksponentna funkcija, zato sta to linearno neodvisni rešitvi in splošna rešitev homogenega dela je

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Ničli sta konjugirani kompleksni par.

Naj bo $\lambda_1 = a + ib$ in $\lambda_2 = a - ib$. Tedaj sta

$$y_1 = e^{(a+ib)x} \quad \text{in} \quad y_2 = e^{(a-ib)x}$$

partikularni rešitvi. Njun kvocient je

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(a+ib)x}}{e^{(a-ib)x}} = e^{i2bx}$$

in ni konstanten, zato sta rešitvi linearno neodvisni. Splošna rešitev je torej

$$y_H = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}$$

oziroma

$$y_H = e^{ax}(C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx})\,.$$

Ker sta C_1 in C_2 poljubni konstanti, naj bosta konjugirani kompleksni števili. Uporabimo zvezi

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

in

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} y_H &= C_1 e^{a\,x}(\cos(b\,x) + i\sin(b\,x)) + C_2 e^{a\,x}(\cos(b\,x) - i\sin(b\,x)) \\ &= e^{a\,x}[(C_1 + C_2)\cos(b\,x) + (C_1 - C_2) i \sin(b\,x)]\,. \end{aligned}$$

Če postavimo

$$2C_1 = E - iF \quad \text{in} \quad 2C_2 = E + iF\,,$$

sta E in F poljubni realni konstanti in velja

$$C_1 + C_2 = E \quad \text{in} \quad i(C_1 - C_2) = F\,.$$

Tako lahko splošno rešitev zapišemo kot

$$y_H = e^{ax}(E\cos(bx) + F\sin(bx))\,.$$

Sedaj sta $e^{a\,x}\cos(b\,x)$ in $e^{a\,x}\sin(b\,x)$ partikularni rešitvi. Ker njun kvocient $\cot(b\,x)$ ni konstanten, sta linearno neodvisni.

(iii) Ničla je realna in dvojna.

Naj bo λ_0 dvojna ničla karakterističnega polinoma. Tedaj je ena partikularna rešitev $y_1 = e^{\lambda_0 x}$. Pokažimo, da je $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ druga partikularna rešitev. Najprej izračunajmo oba odvoda:

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} = e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x + 1) \\ y_2'' &= \lambda_0 e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x + 1) + \lambda_0 e^{\lambda_0 x} = \lambda_0 e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x + 2)\,. \end{aligned}$$

Le-ta vstavimo v homogeni del diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x + 2) + a_1 e^{\lambda_0 x}(\lambda_0 x + 1) + a_0 x e^{\lambda_0 x} \\ &= e^{\lambda_0 x}[\underbrace{(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_0)}_{0}\, x + \underbrace{(2\lambda_0 + a_1)}_{0}] \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Prvi oklepaj je enak 0, ker je λ_0 ničla karakterističnega polinoma. Ker je λ_0 dvojna ničla, je v tej točki odvod karakterističnega polinoma enak 0

$$0 = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)'(\lambda_0) = (2\lambda + a_1)(\lambda_0) = 2\lambda_0 + a_1\,.$$

Torej lahko splošno rešitev zapišemo kot

$$y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\,.$$

Ker je kvocient partikularnih rešitev enak x, sta le-ti linearno neodvisni.

Zgled 75. *Dana je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti*

$$y'' - 4y = 8x\,.$$

1. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe.*

Nastavimo karakteristični polinom

$$\lambda^2 - 4 = 0\,.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2\,.$$

Splošna rešitev homogenega dela je

$$y_H = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x}\,.$$

Partikularno rešitev poiščemo z metodo variacije konstant

$$y_P = C_1(x)\, e^{2x} + C_2(x)\, e^{-2x}\,.$$

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, e^{2x} + C_2'(x)\, e^{-2x} &= 0 \\ 2C_1'(x)\, e^{2x} - 2C_2'(x)\, e^{-2x} &= 8x\,. \end{aligned}$$

Rešimo sistem enačb tako, da prvo enačbo pomnožimo z 2, ju seštejemo in izračunamo $C_1(x)$

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= 2x\, e^{-2x} \\ C_1(x) &= \int 2x\, e^{-2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}(-1-2x)\, e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Uporabimo prvo enačbo v sistemu enačb variacije konstant in izračunamo $C_2'(x)$, zatem pa še $C_2(x)$

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= -C_1'(x)\, e^{4x} \\ &= -2xe^{2x} \\ C_2(x) &= \int (-2xe^{2x})\, dx \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)e^{2x}\,. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(-1-2x)\, e^{-2x}e^{2x} + \frac{1}{2}(1-2x)e^{2x}e^{2x} \\ &= -2x\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$\begin{aligned} y &= y_H + y_P \\ &= C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x} - 2x\,. \end{aligned}$$

2. *Poiščimo tisto rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 4$.*

Izračunati moramo odvod rešitve diferencialne enačbe

$$y' = 2C_1\, e^{2x} - 2C_2\, e^{-2x} - 2\,.$$

Upoštevamo pogoja in izračunamo iskani konstanti

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) &= 2C_1 - 2C_2 - 2 = 4 \\ C_1 &= 3 \\ C_2 &= -3\,. \end{aligned}$$

Iskana rešitev je

$$y = 3\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) - 2x\,.$$

Vse skupaj lahko na naraven način posplošimo na diferencialne enačbe n-tega reda s konstantnimi koeficienti

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)\,.$$

Če postavimo $f(x) = 0$, dobimo homogeni del linearne diferencialne enačbe n-tega reda s konstantnimi koeficienti. Karakteristični polinom je

$$\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda + a_0 = 0\,.$$

Karakteristični polinom ima n ničel, ki so lahko realne ali kompleksne ter enkratne ali večkratne.

V primeru enkratnih ničel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ že vemo, da so rešitve oblike

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ e^{\lambda_n x}\,.$$

Če so ničle kompleksne, nastopajo v konjugiranih parih $\lambda = a \pm i\, b$ in pripadajoči rešitvi sta enaki kot pri enačbah drugega reda

$$e^{a\,x}\cos(b\,x) \quad \text{in} \quad e^{a\,x}\sin(b\,x)\,.$$

Naj bo sedaj λ realna ničla stopnje k. Tedaj ji pripada k rešitev

$$e^{\lambda\,x},\ e^{\lambda\,x}\,x,\ e^{\lambda\,x}\,x^2, \ldots,\ e^{\lambda\,x}\,x^{k-1}\,.$$

Ni težko preveriti, da kvocient posameznih dveh rešitev ni konstanten in so zato linearno neodvisne.

V primeru večkratne kompleksne ničle velja podobno. Naj bo $\lambda = a + i\,b$ kompleksna ničla stopnje k. Tedaj ji pripada $2k$ linearno neodvisnih rešitev

$$\begin{array}{ll} e^{a\,x}\cos(b\,x)\,, & e^{a\,x}\sin(b\,x)\,, \\ e^{a\,x}\cos(b\,x)\,x\,, & e^{a\,x}\sin(b\,x)\,x\,, \\ e^{a\,x}\cos(b\,x)\,x^2\,, & e^{a\,x}\sin(b\,x)\,x^2\,, \\ & \vdots \\ e^{a\,x}\cos(b\,x)\,x^{k-1}, & e^{a\,x}\sin(b\,x)\,x^{k-1}\,. \end{array}$$

Zgled 76. *Poiščimo splošno rešitev homogene linearne diferencialne enačbe 4. reda s konstantnimi koeficienti*

$$y^{(4)} - y = 0\,.$$

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{-x}$$

$$y_3 = e^{0x}\cos(1\,x) = \cos x$$

$$y_4 = e^{0x}\sin(1\,x) = \sin x$$

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_4 + C_4 y_4$$

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x\,.$$

Zgled 77. *Poiščimo splošno rešitev linearne diferencialne enačbe 4. reda s konstantnimi koeficienti*

$$y^{(4)} - y = \sin x\,.$$

Vemo, da je $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, zato iščemo partikularno rešitev v obliki

$$y_H = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x} + C_3(x) \cos x + C_4(x) \sin x\,.$$

Uporabimo variacijo konstant:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} + C_3'(x)\cos x + C_4'(x)\sin x &= 0\\
C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} - C_3'(x)\sin x + C_4'(x)\cos x &= 0\\
C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} - C_3'(x)\cos x - C_4'(x)\sin x &= 0\\
C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} + C_3'(x)\sin x - C_4'(x)\cos x &= \sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2C_2'(x)e^{-x} + C_3'(x)(\cos x + \sin x) + C_4'(x)(\sin x - \cos x) &= 0\\
2C_3'(x)\cos x + 2C_4'(x)\sin x &= 0\\
2C_2'(x)e^{-x} + C_3'(x)(\cos x - \sin x) + C_4'(x)(\sin x + \cos x) &= -\sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2C_3'(x)\cos x + 2C_4'(x)\sin x &= 0 \\ C_3'(x)(\cos x + \sin x - \cos x + \sin x) + & \\ C_4'(x)(\sin x - \cos x - \sin x - \cos x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2C_3'(x)\cos x + 2C_4'(x)\sin x &= 0 \\ 2C_3'(x)\sin x - 2C_4'(x)\cos x &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2C_3'(x)\cos x\sin x + 2C_4'(x)\sin^2 x &= 0 \\ 2C_3'(x)\sin x\cos x - 2C_4'(x)\cos^2 x &= \sin x\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2C_4'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) &= -\sin x\cos x \\ C_4'(x) &= -\tfrac{1}{2}\sin x\cos x \end{aligned}$$

Z nedoločenim integriranjem izračunamo vse štiri neznane funkcije:

$$\begin{aligned} C_4(x) &= \int -\tfrac{1}{2}\sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{8}\cos(2x) \\ C_3(x) &= \int \tfrac{1}{2}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sin(2x)}{2} + x\right) \\ C_2(x) &= \int -\tfrac{1}{4}e^x\sin x\,dx = -\tfrac{1}{8}e^x(\sin x - \cos x) \\ C_1(x) &= \int \tfrac{1}{4}e^{-x}\sin x\,dx = -\tfrac{1}{8}e^{-x}(\sin x + \cos x)\,. \end{aligned}$$

Tako je

$$y_P = \frac{x\ \cos x}{4} - \frac{3x\ \sin x}{8}$$

in splošna rešitev je

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{x\ \cos x}{4} - \frac{3x\ \sin x}{8}\,.$$

Sedaj znamo poiskati rešitev poljubne linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Pri posebnih oblikah funkcije $f(x)$ lahko za iskanje partikularne rešitve y_P namesto variacije konstant uporabimo določeni tip nastavka, ki hitreje privede do rešitve. Naj bo

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y + a_0 = f(x)$$

linearna diferencialna enačba n-tega reda s konstantnimi koeficienti. Pripadajoči karakteristični polinom ima n realnih ali kompleksnih ničel. Na osnovi ničel karakterističnega polinoma dobimo rešitev homogenega dela y_H.

Poglejmo si nastavek za iskanje partikularne rešitve y_P glede na obliko funkcije f. Če je

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}\cos(\beta x) + P_{m_2}\sin(\beta x))\,,$$

kjer sta polinoma P stopenj m_1 oziroma m_2 in je $\alpha \pm i\beta$ k-kratna ničla karakterističnega polinoma, tedaj je nastavek za iskanje partikularne rešitve enak

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))x^k\,,$$

kjer sta $Q_m(x)$ in $R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu m in je $m = \max\{m_1, m_2\}$.

Zgled 78. *Poiščimo tisto rešitev linearne diferencialne enačbe*

$$y'' - y' = 2(1-x)\,,$$

ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = 1$ in $y'(0) = 1$.

Karakteristični polinom je

$$\lambda^2 - \lambda = 0\,.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1\,.$$

Splošna rešitev homogenega dela je

$$y_H = C_1 + C_2\,e^x\,.$$

Pri nastavku za partikularno upoštevamo, da je stopnja polinoma z neznanimi koeficienti ena in da je $\alpha = 0$ enkratna ničla karakterističnega polinoma

$$\begin{aligned} y_P &= (A\,x + B)x\,e^{0\,x} = A\,x^2 + B\,x \\ y_P' &= 2A\,x + B \\ y_P'' &= 2A\,. \end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} 2A - 2A\,x - B &= 2(1-x) \\ -2A\,x + 2A - B &= -2x + 2 \\ A &= 1 \\ B &= 0\,. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$y_P = x^2 .$$

Splošna rešitev je

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2\, e^x + x^2 .$$

Izračunati moramo še obe konstanti in v ta namen potrebujemo odvod rešitve dife-
rencialne enačbe

$$y' = C_2\, e^x + 2x .$$

Upoštevamo pogoja in izračunamo iskani konstanti

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) &= C_2 = 1 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= 1 . \end{aligned}$$

Iskana rešitev je

$$y = e^x + x^2 .$$

3.5 Eulerjeva diferencialna enačba

Med linearnimi diferencialnimi enačbami višjega reda z nekonstantnimi koeficienti je najpreprostejša *Eulerjeva diferencialna enačba*

$$x^n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, x^{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_1\, x\, y' + a_0\, y = f(x) ,$$

kjer so koeficienti $a_i \in \mathbb{R}$.

Z vpeljavo nove spremenljivke $x = e^t$ Eulerjevo diferencialno enačbo prevedemo na linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Omenimo, da smo se z vpeljavo take nove spremenljivke omejili na $x > 0$. Poglejmo si to prevedbo na primeru homogene diferencialne enačbe drugega reda

$$x^2\, y'' + a_1\, x\, y' + a_0\, y = f(x) .$$

Izračunajmo oba odvoda

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'(t)t'(x) = y'(t)\frac{1}{x} = y'(t)e^{-t}\,, \\ y''(x) &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''(t)e^{-t} - y'(t)e^{-t})t'(x) = (y''(t) - y'(t))e^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Dobimo linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti

$$y''(t) + y'(t)(a_1 - 1) + y(t)a_0 = f(t)\,.$$

Če upoštevamo, da iz $x = e^t$ sledi, da je $t = \ln x$ in uporabimo znanje o rešitvah linearnih diferencialnih enačb, dobimo vse rešitve Eulerjeve diferencialne enačbe. Naj bosta λ_1 in λ_2 rešitvi karakterističnega polinoma. Tedaj velja, če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, potem sta

$$x^{\lambda_1} \quad \text{in} \quad x^{\lambda_2}$$

linearno neodvisni rešitvi. Če sta λ_1 in λ_2 konjugirani par kompleksnih ničel z realnim delom α in imaginarnim β, tedaj sta pripadajoči linearno neodvisni rešitvi

$$x^{\alpha}(\cos(\beta\,\ln x)) \quad \text{in} \quad x^{\alpha}(\sin(\beta\,\ln x))\,.$$

V primeru, ko je λ k-kratna ničla karakterističnega polinoma, tedaj so

$$x^{\lambda},\, x^{\lambda}\ln x,\, x^{\lambda}\,\ln^2 x, \ldots, x^{\lambda}\,\ln^{k-1} x$$

linearno neodvisne rešitve.

V primeru, ko je $x < 0$, je v izpeljavi potrebno vpeljati absolutno vrednost, a se ne bomo spuščali v podrobnosti.

Zgled 79. *Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0\,.$$

Nastavimo krakteristični polinom in poiščimo njegovi rešitvi:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda(-7-1) + 16 &= 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 16 &= 0 \\ (\lambda - 4)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 4\,. \end{aligned}$$

Rešitev je tako

$$y(x) = C_1x^4 + C_2x^4\,\ln x\,.$$

3.6 Obstoj in enoličnost rešitve diferencialne enačbe

Spoznali smo več vrst diferencialnih enačb in spoznali postopke za njihovo reševanje, nismo pa se vprašali naslednjega:

Ali za dani začetni problem obstaja rešitev?

Če rešitev obstaja, ali je enolično določena?

Brez dokaza poglejmo pogoj za eksistenco rešitve začetnega problema.

Izrek 3.9. *(*Eksistenčni izrek*)*
Naj bo podan začetni problem

$$y' + f(x)\,y = g(x), \qquad y(x_0) = y_0\,.$$

Če sta f in g zvezni funkciji na intervalu (a,b), $x_0 \in (a,b)$, tedaj obstaja enolična rešitev začetnega problema.

□

Največji interval (a,b) iz Izreka 3.9 je *interval veljavnosti* začetnega problema. Poiščemo ga tako, da na številsko os vrišemo x_0 in točke nezveznosti funkcij f in g, ter poiščemo največji odprti interval, ki vsebuje x_0.

Zgled 80. *Poišči interval veljavnosti za začetni problem*

$$\cos x\, y' - \sin x\, y = 3x\, \cos x, \quad y(2\pi) = 0\,.$$

Zapišimo diferencialno enačbo v splošni obliki

$$y' - \tan x\, y = 3x\,.$$

Vidimo, da je funkcija g povsod zvezna, funkcija f pa je nezvezna v točkah $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Zato je interval veljavnosti $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

Podoben izrek kot za linearne diferencialne prvega reda velja tudi za linearne diferencialne enačbe višjega reda.

Izrek 3.10. *(*Eksistenčni izrek*)*
Naj bo podan začetni problem

$$y^{(n)} + a_{n-1(x)}y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)\,,$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,.$$

Če so a_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$ in f zvezne funkcije na intervalu (a,b), $x_0 \in (a,b)$, tedaj obstaja enolična rešitev začetnega problema. Interval veljavnosti je največji interval zveznosti vseh funkcij, ki vsebuje x_0. □

3.7 Reševanje diferencialnih enačb z vrstami

Spomnimo se najprej, da je potenčna vrsta vrsta oblike

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,,$$

kjer so koeficienti $a_n \in \mathbb{R}$. Potenčna vrsta je konvergentna v točki $x = c$, če je konvergentna vrsta

$$f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, c^n\,,$$

drugače povedano, obstajati mora realno število S tako, da je

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, c^n\,.$$

Vemo že, da za vsako potenčno vrsto obstaja realno število $R \in [0, \infty)$ tako, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ konvergira za vsak $x \in (-R, R)$ in divergira izven tega območja. Število R imenujemo konvergenčni polmer in ga relativno enostavno določimo s kvocientnim ali korenskim kriterijem za preverjanje konvergence:

$$\begin{aligned}
q = |x| \lim\nolimits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad &\ldots \quad \text{kvocientni kriterij}\\
q = |x| \lim\nolimits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad &\ldots \quad \text{korenski kriterij}\\
q < 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{vrsta konvergira}\\
q > 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{vrsta divergira}\\
q = 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{vrsta konvergira ali divergira}\,.
\end{aligned}$$

Tako je konvergenčni polmer enak

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{oziroma} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Vemo tudi že, da lahko konvergentne vrste seštevamo (odštevamo), odvajamo in integriramo. Kot enega od pomembnejših primerov potenčne vrste smo spoznali Taylorjevo vrsto. Poenostavljeno povedano, če je f dovoljkrat odvedljiva, jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto v okolici poljubne točke x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,.$$

Pri reševanju diferencialnih enačb z vrstami je eden od ključnih pojmov analitičnost funkcije.

Definicija 3.11. *Funkcija f je* analitična *v točki x_0, če jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto v okolici točke x_0.*

Naj bo sedaj dana diferencialna enačba oblike

$$y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0\,,$$

kjer sta $A_1(x)$ in $A_0(x)$ poljubni funkciji. V zvezi z obstojem rešitve dane diferencialne enačbe velja naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali.

Izrek 3.12. *Če sta funkciji $A_1(x)$ in $A_0(x)$ analitični funkciji v točki x_0, tedaj je tudi rešitev diferencialne enačbe*

$$y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$$

analitična funkcija v okolici točke x_0 □

Ideja reševanja diferencialnih enačb z vrstami je v predpostavki, da lahko rešitev diferencialne enačbe razvijemo v potenčno vrsto (glej Izrek 3.12):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

in potem poskusimo določiti koeficiente a_n. To lahko naredimo le, če razvijamo v okolici točke, ki je regularna. Poglejmo si metodo na primeru.

Zgled 81. *Reši diferencialno enačbo*

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0\,.$$

Najprej preverimo analitičnost posameznih funkcij:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \\ A_1(x) &= \frac{x}{1+x^2} = x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}\,. \end{aligned}$$

Vpeljimo nastavek $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ in izračunajmo prvi in drugi odvod:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \\ y' &= a_1 + 2a_2\, x + 3a_3\, x^2 + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \\ y'' &= 2a_2\, x + 3\cdot 2\, a_3\, x^2 + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo:

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n(n(n-1)+n-1) &= 0\\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n(n^2-1) &= 0\\
\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}\,x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k(k^2-1) &= 0\\
\sum_{k=0}^{\infty} x^k\left((k+2)(k+1)\,a_{k+2} + (k^2-1)a_k\right) &= 0 \quad \Rightarrow\\
(k+2)(k+1)\,a_{k+2} + (k^2-1)a_k &= 0\\
(k+1)((k+2)a_{k+2} + (k-1)a_k) &= 0 \quad \Rightarrow\\
(k+2)a_{k+2} + (k-1)a_k &= 0\\
a_{k+2} &= \frac{1-k}{k+2}\,a_k\,.
\end{aligned}
$$

Dobili smo dvočleno rekurzivno zvezo, ki je enolično določena z začetnima pogojema a_0 in a_1. Nadaljnje člene izračunamo:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2}\,a_0\\
a_3 &= \frac{0}{3}\,a_1 = 0\\
a_4 &= \frac{-1}{8}\,a_0\\
a_5 &= 0\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Lihi členi so, kot kaže, enaki 0, sode pa izpeljimo:

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= -\frac{2k-3}{2k}\,a_{2k-2} \\
&= \frac{2k-3}{2k}\,\frac{2k-5}{2k-2}\,a_{2k-4} \\
&= -\frac{2k-3}{2k}\,\frac{2k-5}{2k-2}\,\frac{2k-7}{2k-4}\,a_{2k-6} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^k\frac{(2k-3)(2k-5)(2k-7)\cdots 3\cdot 1\cdot(-1)}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}a_0 \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(2k-3)(2k-5)(2k-7)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}a_0 \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,a_0\,,\ k\geq 2,\ a_2=\frac{a_0}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
y &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n \\
&= a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+a_4\,x^4+\cdots \\
&= a_0+a_1\,x+\textstyle\sum_{k=2}^{\infty} a_{2k}\,x^{2k} \\
&= a_0+a_1\,x+\tfrac{a_0}{2}x^2+\textstyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,a_0\,x^{2k}\,.
\end{aligned}
$$

Rešitev diferencialne enačbe je

$$
y(x)=a_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,x^{2k}\right)+a_1\,x\,.
$$

Rešitev diferencialne enačbe iz Zgleda 81 vsebuje linearno neodvisni rešitvi in pa konstanti a_0 in a_1, kar je v skladu s tem, kar vemo o rešitvah linearne diferencialne enačbe drugega reda. V Zgledu 81 je ena od rešitev kar identiteta, druga rešitev je potenčna vrsta, ki ne predstavlja nobene elementarne fukcije. Najbolj znani primer diferencialne enačbe, katere rešitev ne predstavlja elementarne funkcije, je *Besselova diferencialna enačba*

$$
x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0\,,
$$

kjer je ν konstanta. Iskanje rešitve Besselove diferencialne enačbe temelji na naslednjem Izreku 3.13, ki posega na področje kompleksne analize in ga prav tako ne bomo dokazali.

Izrek 3.13. *Vsaka diferencialna enačba oblike*

$$x^2y'' + xA_1(x)y' + A_0(x)y = 0\,,$$

kjer sta $A_1(x)$ in $A_0(x)$ analitični funkciji v točki $x = 0$, ima vsaj eno rešitev oblike

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,,$$

pri čemer je p poljubno (lahko tudi kompleksno) število tako, da je $a_0 \neq 0$.

(Opomba: Funkcija $\frac{A_1(x)}{x}$ lahko ima pol prve stopnje, $\frac{A_0(x)}{x^2}$ pa lahko ima pol druge stopnje.)

Zgled 82. *Poišči rešitev Besselove diferencialne enačbe:*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0\,.$$

Funkciji 1 in$x^2 - \nu^2$ sta obe analitični v $x = 0$, zato uporabimo nastavek

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

Izračunajmo njegova prva dva odvoda::

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0\, x^p + a_1\, x^{p+1} + a_2\, x^{p+2} + \cdots \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+p} \\
y'(x) &= p\, a_0\, x^{p-1} + (p+1)\, a_1\, x^p + (p+2)\, a_2\, x^{p+1} + \cdots \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (p+n)\, a_n\, x^{p+n-1} \\
y''(x) &= p\,(p-1)\, a_0\, x^{p-2} + (p+1)\, p\, a_1\, x^{p-1} + (p+2)\,(p+1)\, a_2\, x^p + \cdots \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (p+n)\,(p+n-1)\, a_n\, x^{p+n-2}\,.
\end{aligned}$$

Nastavek in odvoda vstavimo v diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(p+n)(p+n-1)a_n\, x^{p+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(p+n)a_n\, x^{p+n} + \\
\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{p+n+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{p+n} &= 0 \\
\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n}((p+n)(p+n-1) + (p+n) - \nu^2)\, a_n + + \sum_{n=2}^{\infty} x^{p+n}\, a_{n-2} &= 0 \\
\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n}(p+n-\nu)(p+n+\nu)\, a_n + \sum_{n=2}^{\infty} x^{p+n}\, a_{n-2} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Koeficienti morajo biti enaki 0 in jih poglejmo po vrsti. Koeficient pred x^p je enak

$$(p-\nu)(p+\nu)a_0 = 0\,,$$

in ker je po predpostavki Izreka 3.12 $a_0 \neq 0$, mora biti $p=\nu$ ali $p=-\nu$. Nadalje, pri x^{p+1} dobimo

$$(p+1-\nu)(p+1+\nu)\,a_1 = 0\,,$$

in ker je $p=\nu$ ali $p=-\nu$, mora biti nujno $a_1=0$. Pri vseh naslednjih eksponentih prideta v poštev že obe vrsti

$$\begin{aligned}
x^{p+2} &: \quad (p+2-\nu)(p+2+\nu)a_2 + a_0 = 0\,,\\
\vdots & \qquad \vdots\\
x^{p+n} &: \quad (p+n-\nu)(p+n+\nu)a_n + a_{n-2} = 0\,.
\end{aligned}$$

in opazimo, da dobimo rekurzivno zvezo

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(p+n-\nu)(p+n+\nu)}\,,\ n=2,3,\cdots\,.$$

Ker je $a_1=0$, so zato vsi členi z lihimi indeksi prav tako enaki 0. Naj bo najprej $p=\nu$ in izračunajmo še člene s sodimi indeksi $n=2k$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2\nu)} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(k+\nu)}\,.$$

Za zaporedno uporabo te rekurzije dobimo splošni člen a_{2k}:

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{-1}{4k(k+\nu)}\,a_{2k-2}\\
&= \frac{-1}{4k(k+\nu)}\cdot\frac{-1}{4(k-1)(k-1+\nu)}\,a_{2k-4}\\
&= \frac{-1}{4k(k+\nu)}\cdot\frac{-1}{4(k-1)(k-1+\nu)}\cdot\frac{-1}{4(k-2)(k-2+\nu)}\,a_{2k-6}\\
&= \quad\cdots\\
&= \frac{-1}{4k(k+\nu)}\cdot\frac{-1}{4(k-1)(k-1+\nu)}\cdot\frac{-1}{4(k-2)(k-2+\nu)}\cdots\frac{-1}{4\cdot 1\cdot(1+\nu)}\,a_0\\
&= \frac{(-1)^k}{4^k k!(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)}\,a_0\,.
\end{aligned}$$

Upoštevajmo lastnost Eulerjeve funkcije Γ, ki smo jo izpeljali pri obravnavi posplošenega integrala:

$$\Gamma(x+k+1) = \Gamma(x+1)(x+1)(x+2)\cdots(x+k)\,.$$

Tako so koeficienti pred sodimi členi v razvoju rešitve y v potenčno vrsti

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}\, a_0$$

in ena od rešitev Besselove diferencialne enačbe je

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+\nu} \\ &= a_0\, x^{\nu} + a_2\, x^{2+\nu} + a_4\, x^{\nu+4} + \cdots \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\, x^{2k+\nu} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\, a_0\,. \end{aligned}$$

Če izberemo

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\,,$$

dobimo rešitev, ki jo označimo z $J_\nu = y_1$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

in jo imenujemo jo *Besselova funkcija prve vrste reda* ν. Posebej uporabni sta funkciji, ki ju dobimo za $\nu = 0$ in $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= 1 - \dfrac{1}{(1!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{(2!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 - \cdots \\ J_1(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+2)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+1} \\ &= \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{1!2!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2!3!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 - \cdots \end{aligned}$$

Vsaki rešitvi Besselove diferencialne enačbe pravimo Besselova ali cilindrska funkcija. Če bi namesto $p = \nu$ izbrali drugo rešitev $p = -\nu$, bi dobili drugo rešitev Besselove diferencialne enačbe

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} .$$

Izkaže se, da sta rešitvi Besselove diferencialne enačbe $J_\nu(x)$ in $J_{-\nu}(x)$ linearno neodvisni samo za $\nu \in \mathbb{Z}^-$, zato je samo v tem primeru njuna linearna kombinacija tudi splošna rešitev Besselove diferencialne enačbe.

3.8 Uporaba diferencialnih enačb

Pogledali si bomo nekaj primerov uporabe diferencialnih enačb pri fiziki in kemiji.

Prosti pad z upoštevanjem zračnega upora

V začetku tega poglavja smo obravnavali modeliranje prostega pada oziroma navpičnega meta, pri čemer nismo upoštevali zračnega upora. Naj bo $F_1 = m\,g$ sila teže in $F_2 = -k\,v^2$ sila zračnega upora, kjer je k koeficient zračnega upora in $v = v(t)$, kot običajno, hitrost padajočega telesa. Po drugem Newtonovem zakonu velja:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ m\,a &= m\,v - k\,v^2 \\ m\,\frac{d\,v}{d\,t} &= m\,v - k\,v^2 \\ \frac{d\,v}{d\,t} &= v - \frac{k}{m}\,v^2 . \end{aligned}$$

Zaradi lažjega integriranja v nadaljevanju vpeljimo $b^2 := \dfrac{m\,g}{k}$ in rešimo diferencalno enačbo:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,v}{d\,t} &= \frac{b^2\,k}{m} - \frac{k}{m}v^2 \\
\frac{d\,v}{d\,t} &= \frac{k}{m}(b^2 - v^2) \\
\int \frac{d\,v}{v^2 - b^2} &= -\int \frac{k}{m} d\,t \\
\frac{1}{2b}\ln\frac{v-b}{v+b} &= -\frac{k}{m}t + C \\
\ln\frac{v-b}{v+b} &= -\frac{2b\,k}{m}t + 2b\,C \\
\frac{v-b}{v+b} &= e^{-\frac{2b\,k}{m}t}e^{2b\,C}, \quad d := \tfrac{2b\,k}{m},\ D := e^{2b\,C} \\
\frac{v-b}{v+b} &= D\,e^{-d\,t} \\
v - b &= D\,e^{-d\,t}(v+b) \\
v(1 - D\,e^{-d\,t}) &= b\,(D\,e^{-d\,t} + 1) \\
v(t) &= b\,\frac{D\,e^{-d\,t}+1}{1 - D\,e^{-d\,t}}\,.
\end{aligned}
$$

Dobili smo splošno rešitev začetnega problema. Če upoštevamo začetni pogoj $v(0) = v_0$, dobimo partikularno rešitev

$$
\begin{aligned}
v_0 &= b\,\frac{D+1}{1-D} \\
v_0(1-D) &= b\,(D+1) \\
D &= \frac{v_0 - b}{v_0 + b}\,,
\end{aligned}
$$

ki se glasi

$$
v(t) = b\,\frac{\frac{v_0-b}{v_0+b}\,e^{-d\,t} + 1}{1 - \frac{v_0-b}{v_0+b}\,e^{-d\,t}}\,.
$$

Če čas t (teoretično) pošljemo v neskončnost, dobimo končno hitrost

$$v_k = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} b\,\frac{D\,e^{-d\,t}+1}{1-D\,e^{-d\,t}} = b = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}\,.$$

Vidimo, da je končna hitrost konstantna.

Do enakega zaključka pridemo z naslednjim sklepanjem. Telo bo začelo padati enakomerno, ko bosta nanj delujoči sili po velikosti nasprotno enaki, to pomeni

$$m\,g = k\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}\,.$$

Zgled 83. *Padalec, ki skupaj s padalom tehta* 80 kg*, je padalo odprl, ko je že padal s hitrostjo* 10 m/s*. Po preteku 1 minute se mu je hitrost padanja praktično ustalila na* 5 m/s*. Poiščimo koeficient k zračnega upora in hitrost $v(t)$.*

$$\begin{aligned} v_0 &= 10\,m/s \\ v_k &= 5\,m/s \\ m &= 80\,kg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_k &= b = \sqrt{\frac{m\,g}{k}} \Rightarrow \\ k &= \frac{m\,g}{v_k^2} = \frac{80\cdot 10}{25^2} = 32 \\ D &= \frac{v_0-b}{v_0+b} = \frac{10-5}{10+5} = \frac{1}{3} \\ d &= \frac{2k\,b}{m} = \frac{2\cdot 32\cdot 5}{80} = 4 \\ v(t) &= 5\frac{1+\frac{1}{3}\,e^{-4t}}{1-\frac{1}{3}\,e^{-4t}}\,. \end{aligned}$$

Zakon o delovanju mas

Pri konstantni temperaturi velja, da je hitrost kemijske reakcije premosorazmerna produktu koncentracij reaktantov, ki reagirajo. Za dvomolekularno reakcijo

$$A + B \to M$$

naj bo v enem litru a molov snovi A in b molov snovi B. Če je $y = y(t)$ število molov na liter, ki so v času t zreagirali, tedaj je hitrost reakcije določena z

$$\frac{dy}{dt} = k\,(a-y)(b-y)\,.$$

Poiščimo rešitev te diferencialne enačbe ob predpostavki, da je $a \neq b$ in je $y(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= k\,(a-y)(b-y) \\
\frac{dy}{(a-y)(b-y)} &= k\,dt
\end{aligned}$$

Razstavimo na parcialne ulomke

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-y)(b-y)} &= \frac{A}{a-y} + \frac{B}{b-y} \\
1 &= A(b-y) + B(a-y) \\
1 &= y(-A-B) + Ab + Ba \\
A + B &= 0 \;\Rightarrow\; A = -B \\
Ab + Ba &= 1 \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{a-b} - A\,.
\end{aligned}$$

Nadaljujmo z reševanjem diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\,y}{(a-y)(b-y)} &= \int k\,d\,t \\
\frac{1}{b-a}\int \frac{d\,y}{a-y} + \frac{1}{a-b}\int \frac{d\,y}{b-y} &= \int k\,d\,t \\
\frac{1}{a-b}\ln(a-y) - \frac{1}{a-b}\ln(b-y) &= k\,t + C \\
\frac{1}{a-b}\ln\frac{a-y}{b-y} &= k\,t + C \\
\frac{a-y}{b-y} &= e^{(a-b)\,k\,t}\,e^{(a-b)\,C} \\
\frac{a-y}{b-y} &= D\,e^{(a-b)\,k\,t} \\
a-y &= D\,e^{(a-b)\,k\,t}(b-y) \\
y(t) &= \frac{D\,b\,e^{(a-b)\,k\,t} - a}{D\,e^{(a-b)\,k\,t} - 1}\,.
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo partikularno rešitev:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \frac{D\,b - a}{D-1} = 0 \Rightarrow D = \frac{a}{b} \\
y(t) &= \frac{\frac{a}{b}\,b\,e^{(a-b)\,k\,t} - a}{\frac{a}{b}\,e^{(a-b)\,k\,t} - 1} \\
y(t) &= a\,b\,\frac{e^{(a-b)\,k\,t} - 1}{a\,e^{(a-b)\,k\,t} - b}\,.
\end{aligned}$$

Nihanje na spiralni vzmeti

Telo z maso m, ki visi na spiralni vzmeti, v navpični smeri premaknemo za x iz mirujoče lege. Vzmet se upira deformaciji s silo F_1, ki je premosorazmerna z odmikom x:

$$F_1 = -b\,x,\ b > 0\,.$$

Predznak je negativen, ker sila deluje v nasprotni smeri od odmika x. Ko telo spustimo se začne gibati proti mirujoči legi s hitrostjo

$$v = \frac{d\,x}{d\,t} = x'\,.$$

Gibanju telesa se upira snov, v kateri sta telo in vzmet (to je lahko bodisi zrak, plin ali kapljevina), s silo F_2, ki je premosorazmerna s hitrostjo v:

$$F_2 = c\,v = -c\,x'\,,\; c > 0\,.$$

Po drugem Newtonovem zakonu velja

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ m\,a &= -b\,x - c\,x' \\ m\,x'' &= -b\, - c\,x' \\ x'' + \frac{c}{m}\,x' + \frac{b}{m}\,x &= 0\,. \end{aligned}$$

Dobili smo diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Za lažje reševanje vpeljimo

$$\frac{c}{m} := 2\,k \quad \text{in} \quad \frac{b}{m} := \omega^2\,.$$

Sedaj rešujemo diferencialno enačbo

$$x'' + k\,x' + \omega^2\,x = 0\,.$$

Poiščimo ničli karakterističnega polinoma

$$\begin{aligned} \lambda^2 + k\,\lambda + \omega^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega^2}}{2} &= -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}\,. \end{aligned}$$

Glede na odnos med k in ω ločimo tri možnosti (naj bo $r^2 := k^2 - \omega^2$):

(i) $k^2 > \omega^2$

V tem primeru imamo dve različni realni ničli karakterističnega polinoma

$$\lambda_{1,2} = -k \pm r$$

in rešitev diferencialne enačbe je

$$x(t) = C_1\,e^{(-k+r)\,t} + C_2\,e^{(-k-r)\,t}\,.$$

(ii) $k^2 < \omega^2$

V tem primeru imamo konjugirani kompleksni ničli karakterističnega polinoma

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i\,r$$

in rešitev diferencialne enačbe je

$$x(t) = C_1\,e^{-k\,t}\,\cos(r\,t) + C_2\,e^{-k\,t}\,\sin(r\,t)\,.$$

(iii) $k^2 = \omega^2$

V tem primeru imamo dvojno realno ničlo karakterističnega polinoma

$$\lambda_{1,2} = -k$$

in rešitev diferencialne enačbe je

$$x(t) = C_1\, e^{-k\, t} + C_2\, e^{-k\, t}\, t\,.$$

Če na vzmet delujemo s periodično zunanjo silo

$$F = F_0\, \sin(\beta\, t)\,,$$

dobimo nehomogeno diferencialno enačbo

$$x'' + k\, x' + \omega^2\, x = F_0\, \sin(\beta\, t)\,.$$

Slike

Stvarno kazalo