UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA KEMIJO IN KEMIJSKO TEHNOLOGIJO

Petra Žigert Pleteršek

MATEMATIKA III

Maribor, september 2017

Kazalo

Zbrano gradivo za predmet Matematika III na UNI programu FKKT je še zmeraj v fazi priprave in še ni recenzirano.

Diferencialni račun vektorskih funkcij

Zanimale nas bodo vektorske funkcije, to so funkcije, ki slikajo iz

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m .$$

Najprej se bomo omejili na funkcije, katerih kodomena je $\mathbb{R}$ in jih imenujemo skalarne funkcije, $(n = 1)$, v nadaljevanju pa bomo pogledali še preostale, $(n > 1)$, torej vektorske funkcije. Spomnimo se, da je $\mathbb{R}^n$ kartezični produkt n-faktorjev $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} .$$

Elementi množice $\mathbb{R}^n$ so urejene n-terice:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \dots, n .$$

Včasih jih enačimo z matrikami z enim samim stolpcem in n-vrsticami ter jih imenujemo vektorji

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

V nadaljevanju bomo potrebovali skalarni produkt dveh vektorjev oz. urejenih n-teric.

Definicija 1.1 *Naj bosta* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *in* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *elementa množice* $\mathbb{R}^n$*. Tedaj je njun* skalarni produkt *enak*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

1.1 Skalarne funkcije

1.1.1 Definicijsko območje in graf

Funkcije, ki slikajo iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}$, imenujemo *funkcije več spremenljivk* ali tudi *skalarne funkcije vektorske spremenljivke.* .

Definicija 1.2 Funkcija n spremenljivk *priredi vsaki točki* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *podmnožice* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *realno število* $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, torej je preslikava*

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,.$$

Množica D *je* definicijsko območje *funkcije* f*.*

Če definicijsko območje ni posebej podano, je to največja množica, za katero je predpis f smiselen.

Zgled 1.3 *Za naslednje primere funkcij več spremenljivk poišči definicijska območja.*

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\begin{aligned} 1-x^2-y^2 &\geq 0 \\ x^2+y^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Definicijsko območje je krog v $\mathbb{R}^2$ s polmerom ena, skupaj z robom.

2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

$$\begin{aligned} 1-x^2 &\geq 0 \\ 1-y^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Definicijsko območje je kvadrat $[-1,1]^2$.

3. Formula za izračun prostornine valja je $f(r,h) = \pi r^2 h$

$$r, h > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\,.$$

4. $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

$$\begin{aligned} 1-x^2-y^2-z^2 &\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Definicijsko območje je krogla v $\mathbb{R}^3$ s polmerom ena, skupaj z robom.

O funkcijah dveh (ali več neodvisnih spremenljivk) lahko govorimo le, če so vse spremenljivke definicijskega območja D medsebojno neodvisne. V $\mathbb{R}^2$ na primer premica ali krivulja ni taka množica, medtem ko recimo kvadrat ali krog sta primera množic, kjer sta obe spremenljivki medsebojno neodvisni. Za formalno definiranje neodvisnosti potrebujemo pojem ϵ-okolice točke v $\mathbb{R}^n$, ki je posplošitev pojma okolice, ki smo ga spoznali pri Matematiki I.

Definicija 1.4 *Naj bo $\epsilon > 0$ in $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Tedaj je* ϵ-okolica *točke $\mathbf{a}$ množica točk $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ki zadoščajo neenačbi*

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \epsilon\,.$$

V $\mathbb{R}^2$ je to krog (brez roba) s polmerom ϵ, v $\mathbb{R}^3$ pa krogla (prav tako brez roba). Prav zato bomo za ϵ-okolico točke $\mathbf{a}$ uporabljali oznako $K_\epsilon(\mathbf{a})$.

Zdaj lahko formalno definiramo definicijsko območje funkcije več spremenljivk.

Definicija 1.5 *Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je lahko* definicijsko območje *funkcije n spremenljivk, če vsebuje kakšno ϵ-okolico vsaj ene svoje točke.*

S pomočjo ϵ-okolice lahko definiramo lego točke glede na območje D.

Definicija 1.6 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Točka $\mathbf{x} \in D$ je* notranja točka *množice D, če kaka njena ϵ-okolica vsebovana v D. Točka je* zunanja točka, *če kakšna njena ϵ-okolica ne seka množice D. In nazadnje $\mathbf{x} \in D$ je robna točka, če vsaka njena ϵ okolica vsebuje tako točke iz D kot tudi točke, ki niso v D.*

Če je vsaka točka množica D notranja, tedaj je D odprta *množica.*

Tako je recimo v $\mathbb{R}^2$ krog brez roba odprta množica, z robom pa ne. Podobno velja v $\mathbb{R}^3$ za kroglo.

Funkcijo dveh spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lahko geometrijsko ponazorimo z njenim grafom

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z); (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

ki predstavlja neko ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Pri risanju grafa funkcije dveh spremenljivk so nam v pomoč nivojnice.

Definicija 1.7 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in naj bo $c \in \mathbb{R}$.* Nivojnica N_c *je množica točk $(x, y) \in D$, za katere velja*

$$f(x, y) = c\,.$$

Poleg nivojnic za predstavitev grafa funkcije dveh spremenljivk uporabljamo še prereze. *Prerez* dobimo tako, da si izberemo neko krivuljo v D in gledamo, kako se funkcija obnaša nad to krivuljo.

Zgled 1.8 *S pomočjo nivojnic in prerezov predstavi graf funkcije:*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$,

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$,

d) $f(x,y) = 3 - \frac{x}{2} - y$.

1.1.2 Zveznost in limita

Zveznost in limita funkcije več spremenljivk se definira na podoben način kot za funkcijo ene spremenljivke. Najprej bomo nove pojme pogledali za funkcijo dveh spremenljivk, ter jih zatem posplošili.

Definicija 1.9 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in L realno število. Če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da iz $(x,y) \in K_\delta(a,b)$, $(x,y) \neq (a,b)$, sledi*

$$|f(x,y) - L| < \epsilon\,,$$

tedaj je število L limita *funkcije f v točki (a,b) in pišemo*

$$L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\,.$$

Definicijo limite lahko posplošimo na funkcije več spremenljivk.

Definicija 1.10 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in L realno število. Če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da iz $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sledi*

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \epsilon\,,$$

tedaj je število L limita *funkcije f v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in pišemo*

$$L = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Definicija 1.11 *Funkcija dveh spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $(a,b) \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsako točko $(x,y) \in K_\delta(a,b)$ velja*

$$|f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon\,.$$

Zgled 1.12 *Ali je funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podana s predpisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zvezna.

Opazimo, da je $f(x,0) = 1$, kar pomeni, da se točke na x osi blizu (0,0) vse preslikajo v 1, medtem ko se $(0,0)$ preslika v 0, kar pomeni, da f ni zvezna.

Definicijo zveznosti lahko seveda posplošimo na funkcijo več spremenljivk.

Definicija 1.13 *Funkcija več spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsako točko $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ velja*

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \epsilon\,.$$

Iz definicij zveznosti in limite neposredno sledi izrek.

Izrek 1.14 *Funkcija več spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,.$$

Podobno kot velja za funkcije ene spremenljivke, velja tudi za funkcije več spremenjlivk, da so vsota, razlika in produkt zveznih funkcij spet zvezne funkcije. Kvocient zveznih funkcij je zvezna funkcija povsod tam, kjer je definiran.

Zgled 1.15 *Ali je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dana s predpisom*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i\,,$$

zvezna?

Naj bo $\mathbf{x} \in K_\delta(\mathbf{a})$, kar pomeni, da je $\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2} < \delta$. Tedaj je

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_i, a_2, \ldots, a_n)| &= |x_i - a_i| \\ &< \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2} \\ &< \delta\,. \end{aligned}$$

Tako za vsak $\epsilon > 0$ izberemo $\delta < \epsilon$, s čimer zadostimo definiciji zveznosti.

Včasih je preprosteje preverjati zveznost v polarnih koordinatah, zato vpeljimo polarne koordinate in nato definirajmo zveznost. Že pri kompleksnih številih smo videli, da lahko lego poljubne točke v ravnini $\mathbb{R}^2$ opišemo namesto v kartezičnem koordinatnem sistemu s polarnimi koordinatami:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi\,, \end{aligned}$$

kjer je polmer $r > 0$ in argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ ter veljata zvezi

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x}\,. \end{aligned}$$

Poglejmo si zdaj zveznost v polarnih koordinatah.

Definicija 1.16 *Funkcija dveh spremenljivk* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je zvezna v točki* $(0,0) \in D$, *če za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja* $\delta > 0$ *tak, da za vsak* $r < \delta$ *velja*

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0)| < \epsilon\,.$$

Nadalje je f *zvezna v točki* $(a,b) \in D$ *če za vsak* $\epsilon > 0$ *obstaja* $\delta > 0$ *tak, da za vsak* $r < \delta$ *velja*

$$|f(a + r\cos\varphi, b + r\sin\varphi) - f(a,b)| < \epsilon\,.$$

Zgled 1.17 *Ali je funkcije* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *podana s predpisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (0,0) \end{cases}$$

zvezna?

Poglejmo, kako preverimo zveznost v polarnih koordinatah. Problematična točka je samo točka $(0,0)$.

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2(\cos\varphi\sin\varphi)}{\sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}} = \frac{1}{2}r\sin(2\varphi)\,.$$

Tedaj je

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi - f(0,0)| = |\frac{1}{2}r\sin(2\varphi)| \leq \frac{1}{2}r < \epsilon\,.$$

Če je za poljuben $\epsilon > 0$ $\delta = 2\epsilon$, tedaj smo zadostili definiciji zveznosti v točki $(0,0)$.

Zgled 1.18 *Ali je funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podana s predpisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ; \quad (0,0) \end{cases}$$

zvezna?

Problematična točka je ponovno samo točka $(0,0)$. Poglejmo funkcijsko vrednost v polarnih koordinatah:

$$f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r^2\cos^2\varphi\,.$$

Tedaj je

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi - f(0,0)| = |r^2\cos^2\varphi| \leq r^2 < \epsilon\,.$$

Če je za poljuben $\epsilon > 0$ $\delta = \sqrt{\epsilon}$, tedaj smo zadostili definiciji zveznosti v točki $(0,0)$.

Zgled 1.19 *Ali je funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podana s predpisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ; \quad (0,0) \end{cases}$$

zvezna.

Izračunajmo najprej funkcijsko vrednost v polarnih koordinatah:

$$f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) = \frac{r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \cos 2\varphi\,.$$

Funkcijska vrednost je neodvisna od r, kar pomeni, da se vse točke na nekem poltraku slikajo v vrednost $\cos(2\varphi)$. Tako se lahko dve točki blizu $(0,0)$, ena na x osi, druga na y osi, slikata v 1 oziroma -1 in posledično f ni zvezna.

Zgled 1.20 *Pokaži, da je zvezna poljubna funkcija f oblike*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g_1(x,y)\,x + g_2(x,y)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

kjer je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2(x,y) = 0\,.$$

Preveriti moramo zveznost v točki $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) &= \frac{g_1(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)r\cos\varphi + g_2(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)r\sin\varphi}{r} \\ &= g_1(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)\cos\varphi + g_2(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Iz predpostavke

$$\lim_{r\to 0} g_1(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) = \lim_{r\to 0} g_2(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) = 0$$

zato sledi

$$\lim_{r\to 0} f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi) = 0\,.$$

Ker je limita v točki $(0,0)$ enaka funkcijski vrednosti v tej točki, je funkcija zvezna.

1.1.3 Parcialni odvod

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk. Izberimo točko $(a,b) \in D$. Fiksirajmo drugo koordinato b, prvo koordinato x pa spreminjamo. Zanima nas, kako se pri tem spreminjajo funkcijske vrednosti $f(x,b)$. Funkcija $f(x,b)$ je funkcija ene spremenljivke in pišimo $f(x,b) = g(x)$.

Definicija 1.21 *Če obstaja limita diferenčnega kvocienta*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\,,$$

jo imenujemo parcialni odvod *funkcije f po spremenljivki x v točki (a,b) in ga označimo*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \textit{ali} \quad f_x(a,b)\,.$$

Geometrijsko gledano na vrednost $f_x(a,b)$ opisuje hitrost spreminjanja vrednosti funkcije f, če se iz (a,b) premikamo v smeri x osi.

Na podoben način definiramo odvod po drugi spremenljvki.

Definicija 1.22 *Če obstaja limita diferenčnega kvocienta*

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(b+k)-g(b)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\,,$$

jo imenujemo parcialni odvod *funkcije f po spemenljivki y v točki (a,b) in ga označimo*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad \textit{ali} \quad f_y(a,b)\,.$$

Zgled 1.23 *Izračunaj oba parcialna odvoda funkcije dveh spremenljivk*

$$f(x,y) = x^4 + 2xy^2 + y\ln x + 3\,.$$

Parcialna odvoda sta enaka

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 + 2y^2 + \frac{y}{x} \quad \textit{in} \\ f_y(x,y) &= 4xy + \ln x\,. \end{aligned}$$

Zgled 1.24 *Poišči parcialna odvoda funkcije*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Pracialni odvod izračunamo tako, da v točki $(0,0)$, kjer ne moremo uporabiti pravil za odvajanje, parcialno odvajamo po definiciji odvoda:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\partial x} \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{cases} ,$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\partial y} \\ \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{cases} .$$

Definicijo parcialnega odvoda lahko posplošimo na funkcije več spremenljivk.

Definicija 1.25 *Če obstaja limita diferenčnega kvocienta*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)}{h},$$

jo imenujemo parcialni odvod *funkcije f po spemenljivki x_i v točki $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ in ga označimo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,\ldots,a_n) \quad \textit{ali} \quad f_{x_i}(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,.$$

Definicija 1.26 *Funkcija* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je* parcialno odvedljiva na D, *če je parcialno odvedljiva v vsaki točki območja* D. *Nadalje,* f *je* zvezno parcialno odvedljiva, *če so parcialni odvodi zvezne funkcije.*

Zgled 1.27 *Izračunaj parcialni odvod po* x_3 *funkcije štirih spremenljivk*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^5 x_2 + e^{x_1+4x_3} + 3x_4 + x_3 x_4 \,.$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; 4e^{x_1+4x_3} + x_4 \,.$$

Funkcija n spremenljivk $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima torej n parcialnih odvodov prvega reda, ki skupaj sestavljajo vektor iz $\mathbb{R}^n$. Imenujemo ga *gradient* funkcije f

$$\operatorname{grad} f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}) \,.$$

Zgled 1.28 *Izračunaj gradient funkcije* f *v točki* $(1, 0, 1, 1)$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^5 x_2 + e^{x_1+4x_3} + 3x_4 + x_3 x_4 \,.$$

Gradient v poljubni točki je

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 x_2 + e^{x_1+4x_3}, x_1^5, 4e^{x_1+4x_3} + x_4, 3 + x_3)$$

in v dani točki

$$\operatorname{grad} f(1, 0, 1, 1) = (e^5, 1, 4e^5 + 1, 4) \,.$$

1.1.4 Totalni diferencial

Definicija 1.29 *Funkcija dveh spremenljivk* $z = f(x, y)$ *je v točki* (a, b) diferenciabilna, *če obstajata parcialna odvoda* $f_x(a, b), f_y(a, b)$ *in je*

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + o(h, k) \,,$$

pi čemer za napako o *velja*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \,.$$

Izraz

$$df = f_x(a, b)\, h + f_y(a, b)\, k$$

imenujemo totalni diferencial.

Funkcija je diferenciabilna na območju D, *ko je diferenciabilna v vsaki točki iz* D.

Če upoštevamo, da je $x = a + h$ in $y = b + k$ poljubna točka v okolici točke (a, b), tedaj za diferenciabilno funkcijo f velja

$$f(x,y) \doteq f(a,b) + df = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\,,$$

kar pomeni, da je totalni diferencial dobra ocena za prirastek funkcije. Gre za linearno aproksimacijo funkcijske vrednosti v točki $(a + h, b + k)$, saj enačba

$$z = f(x,y) \doteq f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-b)$$

določa enačbo ravnine, ki jo imenujemo *tangentna ravnina*.

Zgled 1.30 *S pomočjo totalnega diferenciala izračunaj* $f(0, 1.2)$*, če je*

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,.$$

$$\begin{aligned} f(0,1.2) &= f(0,1) + f_x(0,1)(0-0) + f_y(0,1)(1.2-1) \\ &= 1 + 2 \cdot 0.2 \\ &= 1.4\,. \end{aligned}$$

Eksaktna vrednost je $f(0, 1.2) = 1.44$*, zato je napaka enaka* 0.04.

Zgled 1.31 *Izračunaj totalni diferencial funkcije*

$$z = f(x,y) = \frac{x}{y}\,.$$

$$\begin{aligned} df &= f_x h + f_y k \\ &= \frac{1}{y}h - \frac{x}{y^2}k \\ &= \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \\ &= \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\,. \end{aligned}$$

Zgled 1.32 *Zaradi povišane temperature se polmer in višina valja povečata za 1 %. Za koliko % se približno poveča prostornina valja?*

$$\begin{aligned}
V(r,v) &= \pi r^2 v \\
\frac{dV}{V} &= \frac{V_r\,dr + V_v\,dv}{V} \\
&= \frac{2\pi rv\,dr + \pi r^2\,dv}{\pi r^2 v} \\
&= \frac{2\,dr}{r} + \frac{dv}{v} \\
&= 2\% + 1\% = 3\%
\end{aligned}$$

Zgled 1.33 *Pokaži, da funkcija* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *ni diferenciabilna v točki* $(0,0)$.

Izračunajmo parcialni odvod po x v točki $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \\
&= \pm 1\,.
\end{aligned}$$

Ker ne obstaja parcialni odvod, funkcija ne more biti diferenciabilna.

Obstoj parcialnih odvodov še ne zagotavlja diferenciabilnost funkcije, kar nam pokaže naslednji primer.

Zgled 1.34 *Pokaži, da funkcija*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ni diferenciabilna v točki $(0,0)$, *čeprav obstajata oba parcialna odvoda in je* f *zvezna v točki* $(0,0)$, *kar smo preverili v Zgledih 1.24 in 1.17 .*

Vemo že, da sta oba parcialna odvoda v točki $(0,0)$ enaka 0. Če bi bila f diferenciabilna v točki $(0,0)$, potem

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\,k}{h^2+k^2}\,.
\end{aligned}
$$

Ampak za $h=k$ velja

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2}\,,$$

zato f ni diferenciabilna v točki $(0,0)$. Če preverimo zveznost parcialnih odvodov opazimo, da le-ta ni izpolnjena.

Če k obstoju parcialnih odvodov dodamo njihovo zveznost in še zveznost same funkcija f, tedaj bo f diferenciabilna.

Izrek 1.35 *Zvezna funkcija $f: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferenciabilna, če je f zvezno parcialno odvedljiva.*

Dokaz. Naj bo

$$\Delta f = f(x+h,y+k)-f(x,y) = f(x+h,y+k)-f(x+h,y)+f(x+h,y)-f(x,y)\,.$$

Po Lagrangeovem izreku obstaja ξ med x in $x+h$ tak, de je

$$
\begin{aligned}
f(x+h,y)-f(x,y) &= g(x+h)-g(x) \\
&= g'(\xi)\,h \\
&= f_x(x+\vartheta_1 h, y)\,h, \quad 0<\vartheta_1<1\,.
\end{aligned}
$$

Na podoben način je

$$f(x+h,y+k)-f(x+h,y) = f_y(x+h,y+\vartheta_2 k)k,\ 0<\vartheta_2<1\,.$$

Ker sta oba parcialna odvoda zvezni funkciji, je

$$\begin{aligned} f_x(x+\vartheta_1 h, y) &= f_x(x,y) + o_1(h) \\ f_y(x+h, y+\vartheta_2 k) &= f_y(x,y) + o_2(h,k)\,, \end{aligned}$$

kjer $\lim_{h\to 0} o_1(h) = 0$ in $\lim_{(h,k)\to(0,0)} o_2(h,k) = 0$. Tako je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - (f_x(x,y)\,h + f_y(x,y)\,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o_1(h)\,h + o_2(h,k)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,.$$

Ta limita je enaka 0, kar smo preverili v Zgledu 1.20. ∎

Zgled 1.36 *Lineariziraj funkcijo*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

v okolici točke $(1,2)$.

Ker sta parcialna odvoda v točki $(1,2)$ zvezni funkciji, smemo uporabiti aproksimacijo s totalnim diferencialom:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \;\Rightarrow\; f_x(1,2) = \frac{12}{125} \\ f_y(x,y) &= \frac{x^2(x^2-3y^2)}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; f_y(1,2) = -\frac{11}{125} \\ f(x,y) = f(1+h,2+k) &\doteq f(1,2) + f_x(1,2)h + f_y(1,2)k \\ &= \tfrac{12}{125}x - \tfrac{11}{125}y + \tfrac{4}{25}\,. \end{aligned}$$

Če gledamo v prostoru $\mathbb{R}^3$ kjer je $f(x,y) = z$, dobimo enačbo

$$12x - 11y - 125z = 20\,,$$

ki določa tangentno ravnino.

Zgled 1.37 *Poišči območje, na katerem je funkcija* $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$ *diferenciabilna.*

Preverimo zveznost obeh parcialnih odvodov in vidimo, da je problematična točka $(0,0)$, zato je območje zveznosti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Definicijo totalnega diferenciala lahko seveda posplošimo na funkcijo več spremenljivk.

Definicija 1.38 *Funkcija n spremenljivk* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je v točki* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ diferenciabilna*, če obstajajo vsi parcialni odvodi* $f_{x_i}(\mathbf{a})$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *in je*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})\, h_i}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 \cdots + h_n^2}} = 0\,.$$

Izraz

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a})\, h_i$$

imenujemo totalni diferencial*.*

1.1.5 Posredno odvajanje

Gre za modifikacijo verižnega pravila, ki ga poznamo pri odvajanju kompozituma realnih funkcije realne spremenljivke.

Izrek 1.39 *Naj bo funkcija* $z = f(x, y)$ *diferenciabilna, spremenljivki* x *in* y *pa naj bosta odvedljivi funkciji parametra* t*, torej* $x = x(t)$*,* $y = y(t)$*. Tedaj je* $z(t) = f(x(t), y(t))$ *posredna funkcija parametra* t*, katere odvod je enak*

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\,.$$

Dokaz.

$$z'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}\,.$$

Naj bo $\Delta x = x(t+h) - x(t)$ in $\Delta y = y(t+h) - y(t)$. Tedaj je

$$z'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t)+\Delta x, y(t)+\Delta y) - f(x(t), y(t))}{h}\,.$$

Ker je f diferenciabilna funkcija, je

$$f(x(t)+\Delta x, y(t)+\Delta y) - f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)\,,$$

pri čemer je

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{o(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} = 0\,.$$

Zato je

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lim\nolimits_{h\to 0} \frac{f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)}{h} \\ &= f_x(x(t), y(t)) \lim\nolimits_{h\to 0} \frac{\Delta x}{h} + f_y(x(t), y(t)) \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{o(\Delta x, \Delta y)}{h} \end{aligned}$$

Poglejmo zadnjo limito:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{o(\Delta x,\Delta y)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{o(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{h}\\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{o(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\
&\cdot \lim_{h\to 0}\sqrt{\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right)^2+\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)^2}\\
&= 0\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2)}\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned}
z'(t) &= f_x(x(t),y(t))\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}+f_y(x(t),y(t))\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\\
&= f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)\,.
\end{aligned}$$

∎

Pravilo za posredno odvajanje lahko uporabimo pri izračunu odvoda funkcije ene spremenljivke, kar je ilustriranu na zgledu 1.40.

Zgled 1.40 *Izračunaj odvod funkcije* $z(t)=(t+1)^{t^2}$.

$$\begin{aligned}
x(t) &= t+1\\
y(t) &= t^2\\
z(t) &= f(x(t),y(t)) = x^y\\
z'(t) &= f_x\,x'(t)+f_y\,y'(t)\\
&= y\,x^{y-1}\,1+x^y\,\ln x\,2t\\
&= (t+1)^{t^2-1}+(t+1)^{t^2}\,\ln(t+1)\,2t\,.
\end{aligned}$$

Posledica 1.41 *(Verižno pravilo) Naj bo zdaj funkcija $z = f(x, y)$ diferenciabilna, spremenljivki x in y pa naj bosta diferenciabilni funkciji novih spremenljivk u in v, torej $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$. Potem je z posredno odvisna od spremenljivk u in v ter velja*

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\,.\end{aligned}$$

Dokaz. Pri računanju parcialnega odvoda $\frac{\partial z}{\partial u}$ upoštevamo, da je $v = c$ konstanta, kar pomeni, da sta x in y odvisni samo od spremenljivke u, $x = x(u, c)$ in $y = y(u, c)$. Naj bo $z = f(x(u, c), y(u, c)) = z(u)$. Po izreku 1.39 tedaj velja

$$\begin{aligned}z'(u) &= \frac{\partial f}{\partial x}x'(u) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(u) \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\,.\end{aligned}$$

Podobno pokažemo za drugi parcialni odvod. ∎

Posplošitev verižnega pravila ima naslednjo obliko. Naj bo

$$z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

diferenciabilna funkcija $n \geq 1$ spremenljivk, te pa naj bodo diferenciabilne funkcije $m \geq 1$ novih spremenljivk $t_1, t_2, \ldots, t_n$, torej $x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Potem je z posredno odvisna od spremenljivk $t_1, t_2, \ldots, t_n$ in za vsak $k = 1, 2, \ldots, m$ velja

$$\frac{\partial z}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\,.$$

Zgled 1.42 *Naj bo $z = f(r)$ in $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ polmer v polarnem koordinatnem sistemu. Izračunaj parcialna odvoda.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}\,.\end{aligned}$$

Parcialni odvod $f_x(a,b)$ opisuje hitrost spreminjanja funkcije f, če se iz točke (a,b) premaknemo po premici, ki je vzpredna osi x, torej v smeri vektorja $(1,0)$. Podobno $f_y(a,b)$ opisuje hitrost spreminjanja funkcije f, če se iz točke (a,b) premaknemo po premici, ki je vzpredna osi y, to je v smeri vektorja $(0,1)$. To idejo lahko posplošimo na odvod v poljubni smeri. Ker želimo spremembe funkcijskih vrednosti v posamezni smeri med seboj primerjati po velikosti, naj bo smerni vektor dolžine 1.

Smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\mathbf{s}$ je tako enak odvodu funkcije f vzdolž premice, ki gre skozi točko (a,b) in ima smerni koeficient enak $\frac{s_2}{s_1}$. Poiščimo enačbo te premice v parametrični obliki:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{s_2}{s_1}(x-a)+b \\ \frac{y-b}{s_2} &= \frac{x-a}{s_1}\,. \end{aligned}$$

Tako se enačba premice skozi točko (a,b) s smernim koeficientom $\frac{s_2}{s_1}$ glasi

$$x(h) = s_1\,h + a,\; y(h) = s_2\,h + b, \qquad h \in \mathbb{R}\,.$$

Zato je smiselna naslednja definicija odvoda v smeri.

Definicija 1.43 *Naj bo* $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ *poljuben vektor dolžine 1.* Smerni odvod *funkcije f v točki (a,b) v smeri vektorja* $\mathbf{s}$ *je*

$$f_{\mathbf{s}}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\,s_1, b+h\,s_2) - f(a,b)}{h}\,.$$

Smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\mathbf{s}$ dolžine ena meri hitrost, s katero se spreminja funkcija f, če se iz točke (a,b) premaknemo v smeri vektorja $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$. Če uporabimo standardno oznako za parameter $t = h$ in pišemo $z(t) = f(x(t), y(t))$ je $f(a,b) = z(0)$, torej je za točko (a,b) parameter $t = 0$. Iz formule za posredno odvajanje sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) \\ &= f_x(x(t), y(t))\,s_1 + f_y(x(t), y(t))\,s_2\,. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem, da je $t = 0$, dobimo formulo za računanje smernega odvoda funkcije f v točki (a,b)

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}(a,b) &= f_x(a,b)\,s_1 + f_y(a,b)\,s_2 \\ &= \langle \operatorname{grad} f(a,b), \mathbf{s}\rangle\,. \end{aligned}$$

Formulo lahko seveda posplošimo na funkcijo več spremenljivk. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tedaj je odvod funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ v smeri vektorja $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ enak

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= f_{x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, s_1 + \cdots + f_{x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, s_n \\ &= \langle \operatorname{grad} f(a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{s} \rangle \ . \end{aligned}$$

Zgled 1.44 *Izračunaj odvod funkcije* $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + z^4$ *v točki* $(0, 1, 1)$ *v smeri vektorja* $(-1, 2, 4)$.

Najprej normirajmo smerni vektor

$$\mathbf{s}_n = \frac{1}{\sqrt{21}}(-1, 2, 4)\,.$$

Tako je odvod v smeri enak

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}(0, 1, 1) &= \left\langle (2x + 3y, 3x, 3z^3)(0, 1, 1), \tfrac{1}{\sqrt{21}}(-1, 2, 4) \right\rangle \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{21}} \left\langle (3, 0, 3), (-1, 2, 4) \right\rangle \\ &= \tfrac{9}{\sqrt{21}}\,. \end{aligned}$$

To pomeni, da se vrednost funkcije poveča za $\frac{9}{\sqrt{21}}$ enot na enoto poti pri premiku iz točke $(0, 1, 1)$ v smeri vektorja $(-1, 2, 4)$.

Vidimo, da so parcialni odvodi samo poseben primer odvoda v smeri.

Poglejmo še, kdaj ima smerni odvod $f_{\mathbf{s}}(a, b) = \langle \operatorname{grad} f(a, b), \mathbf{s} \rangle$ največjo vrednost. Naj bo f funkcija dveh spremenljivk in naj bo gradient funkcije f v točki (a, b) neničelen. V množici $\mathbb{R}^2$ ima skalarni produkt dveh vektorjev geometrijski pomen in sicer je enak produktu dolžin obegh vektorjev s kosinusom kota, ki ga vektorja oklepata. Le-ta doseže maksimalno vrednost 1 pri kotu 0, kar pomeni, da imata oba vektorja enako smer, v naše primeru je torej

$$\mathbf{s} = \lambda \operatorname{grad} f(a, b), \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vidimo, da bo smerni odvod maksimalen v smeri gradienta oziroma vektor grad$f$ iz točke (a, b) kaže v smer, v kateri funkcijska vrednost $f(x, y)$ najhitreje narašča.

1.1.6 Taylorjeva formula

Naj bosta parcialna odvoda funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spet parcialno odvedljiva po obeh spremenljivkah. Obstajajo štirje taki odvodi, ki jih imenujemo *parcialni odvodi funkcije f drugega reda*

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f_x}{\partial x}\,, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_x}{\partial y}\,,$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f_y}{\partial y}\,, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\,.$$

Zgled 1.45 *Poišči parcialne odvode drugega reda funkcije*

$$f(x, y) = x^2 + 3xy^4 - 5xy + 2y^3\,.$$

$$f_x = 2x + 3y^4 - 5y \quad , \quad f_y = 12xy^3 - 5x + 6y^2,$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = 2x \quad , \quad f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 12y^3 - 5,$$

$$f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = 12y^3 \quad , \quad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 36xy^3 + 12y\,.$$

Parcialne odvode drugega reda lahko definiramo tudi za funcije več spremenljivk. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima n^2 parcialnih odvodov drugega reda

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,, \quad 1 \leq i, j, \leq n\,.$$

Vsi parcialni odvodi drugega reda funkcije f sestavljajo *Hessejevo matriko H*, ki je kvadratna matrika reda n

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}.$$

Zgled 1.46 *Poišči Hessejevo matriko funkcije*

$$f(x, y, z, u) = x + 3yz + u^2 x - \ln x\, u\,.$$

Parcialni odvodi so

$$
\begin{aligned}
f_x &= u^2 - \tfrac{u}{x}, \\
f_y &= 3z, \\
f_z &= 3y, \\
f_u &= 2ux - \ln x\,.
\end{aligned}
$$

Tako je Hessejeva matrika mešanih odvodov enaka

$$
H = \begin{bmatrix} \frac{u}{x^2} & 0 & 0 & 2u - \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2u - \frac{1}{x} & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix}.
$$

Zgled 1.47 *Poišči mešana parcialna odvoda funkcije f v točki $(0,0)$, če je*

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}
$$

Poiščimo oba parcialna odvoda v poljubni točki:

$$
f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{\partial x} \\ \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{cases},
$$

$$
f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{\partial y} \\ \lim_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{cases}.
$$

Poiščimo še oba mešana odvoda v točki $(0,0)$:

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} &= -1\,, \\
f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Na Primeru 1.47 vidimo, da mešana odvoda nista enaka. Naslednji izrek govori o tem, kdaj bosta mešana odvoda enaka.

Izrek 1.48 *Naj bodo v okolici točke* (a,b) *zvezne funkcije* f, f_x, f_y, f_{xy} *in* f_{xy}. *Tedaj sta mešana parcialna odvoda v točki* (a,b) *enaka*

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)\,.$$

Dokaz. Definirajmo sledeče funkcije

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)\,,\\
\Phi(s) &= f(a+s,b+h) - f(a+s,b)\,, \quad 0 \le s \le h\,,\\
\Psi(t) &= f(a+h,b+t) - f(a,b+t)\,, \quad 0 \le t \le h\,.
\end{aligned}$$

Tedaj je

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Phi(h) - \Phi(0) = \Phi'(s_1)h\,, \quad 0 < s_1 < h\\
\Delta f &= \Psi(h) - \Phi(0) = \Psi'(t_2)h\,, \quad 0 < t_2 < h
\end{aligned}$$

Odvoda funkcij Φ in Ψ sta

$$\begin{aligned}
\Phi'(s) &= f_x(a+s,b+h) - f_x(a+s,b) \quad \text{in}\\
\Psi'(t) &= f_y(a+h,b+t) - f_y(a,b+t)\,.
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Phi'(s_1)h = (f_x(a+s_1,b+h) - f_x(a+s_1,b))h\\
&= ((f_x)_y(a+s_1,b+t_1)h)h\\
&= f_{xy}(a+s_1,b+t_1)h^2\,, \quad 0 < t_1 < h\\
\Delta f &= \Psi'(t_2)h = (f_y(a+h,b+t_2) - f_y(a,b+t_2))h\\
&= ((f_y)_x(a+s_2,b+t_2)h)h\\
&= f_{yx}(a+s_2,b+t_2)h^2\,, \quad 0 < s_2 < h
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{array}{ccc}
f_{xy}(a+s_1,b+t_1) & = & f_{yx}(a+s_2,b+t_2)\\
\downarrow & h \to 0 & \downarrow\\
f_{xy}(a,b) & = & f_{yx}(a,b)\,.
\end{array}$$

■

Če druge parcialne odvode naprej odvajamo, dobimo parcialne odvode tretjega in višjih redov. Tudi za te velja, da če imamo zveznost, so mešani parcialni odvodi enaki.

S pomočjo parcialnih odvodov smo linearizirali funkcijo $f(x,y)$ v okolici točke (a,b)

$$f(a+h,b+k) \doteq f(a,b) + f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k\,.$$

S pomočjo višjih parcialnih odvodov in Taylorjeve vrste, lahko linearno oceno izboljšamo.

Izrek 1.49 *(Taylorjeva formula) Funkcija $f(x,y)$ naj bo $n+1$ krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremeljivki v okolici točke (a,b). Tedaj velja*

$$\begin{aligned} f(a+h,b+h) &= f(a,b) + (f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k) + \\ & \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2\right) + \\ & \frac{1}{3!}\left(f_{xxx}(a,b)\,h^3 + 3f_{xxy}(a,b)\,h^2k + 3f_{xyy}(a,b)\,hk^2 + f_{yyy}(a,b)\,k^3\right) + \cdots + \\ & \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a,b)\,h^{n-i}k^i\right) + R_n\,, \end{aligned}$$

kjer je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\,h^{n+1-i}k^i,\ 0<\vartheta<1\,.$$

Opomba: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ je binomski koeficent.

Dokaz. Naj bo $0 \le t \le 1$ in definirajmo funkcijo spremenljivke t s predpisom

$$F(t) = f(a+th, b+tk)\,.$$

Funkcija F je prav tako n+1 krat zveno odvedljiva v točki $t=0$ in jo lahko zapišemo s pomočjo Taylorjeve formule

$$F(0+t) = F(0) + (t-0)\,F'(0) + \frac{(t-0)^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{(t-0)^n}{n!}F^{(n)}(0) + R_n\,.$$

Upoštevajmo, da je $x = a + t\,h$ in $y = b + t\,k$ ter funkcijo F posredno odvedimo:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{d}{dt} f(a+th, b+tk) = f_x(a+th, b+tk)x'(t) + f_y(a+th, b+tk)y'(t) \\
&= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\
F'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\
F''(t) &= \frac{d}{dt}(f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k) \\
&= (f_{xx}(a+th, b+tk)h + f_{xy}(a+th, b+tk)k)h + \\
&\quad (f_{yx}(a+th, b+tk)h + f_{yy}(a+th, b+tk)k)k \\
F''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)h^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Z matematično indukcijo lahko pokažemo, da za $n \geq 1$ velja

$$F^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(a,b)\, h^{n-i} k^i \,.$$

Dobljene odvode vstavimo v Taylorjevo formulo funkcije F in upoštevamo, da je

$$F(1) = f(a+h, b+k)\,,$$

s čimer je izrek dokazan. ∎

Ostanek R_n je napaka, ki jo naredimo, če vrednost funkcije $f(a+h, b+k)$ ocenimo z vsoto členov reda do n v Taylorjevi formuli. Če je funkcija $f(x,y)$ neskončnokrat parcialno odvedljiva na obe spremenljivki in je

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0\,,$$

tedaj lahko Taylorjevo formulo nadomestimo s *Taylorjevo vrsto*

$$f(a+h, b+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(a,b)\, h^{n-i} k^i \right) \,.$$

Zgled 1.50 *Razvij funkcijo* $f(x,y) = e^{x+y}$ *v Taylorjevo vrsto do členov reda tri v okolici točke* $(0,0)$*.*

1.1.7 Lokalni ekstremi funkcije več spremenljivk

Obravnavali bomo lokalne ekstreme funkcije dveh spremenljivk in zatem izpeljane formule posplošili na funkcije več spremenljivk. Lokalni ekstremi funkcije dveh spremenljivk so definirani na podoben način, kot ekstremi funkcije ene spremenljivke.

Definicija 1.51 *Zvezna funkcija dveh spremenljivk $f(x, y)$ zavzame v točki (a, b)* lokalni minimum*, če obstaja tak δ, da je*

$$f(x, y) - f(a, b) \geq 0$$

za vsako točko $(x, y) \in K_\delta(a, b)$. Podobno ima $f(x, y)$ točki (a, b) lokalni maksimum*, če obstaja tak δ, da je*

$$f(x, y) - f(a, b) \leq 0$$

za vsako točko $(x, y) \in K_\delta(a, b)$.

Lokalni ekstrem je lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Podobno, kot je za funkcijo ene spremenljivke potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema v točke a pogoj $f'(a) = 0$, velja analogija pri funkcijah dveh spremenljivk.

Izrek 1.52 *(potrebni pogoj)*
Naj bo D odprta in $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija v točki (a, b). Če je (a, b) lokalni ekstrem funkcije f, tedaj je

$$f_x(a, b) = 0 \quad in \quad f_y(a, b) = 0\,.$$

Dokaz. Recimo, da ima funkcija f v (a, b) lokalni minimum. Parcialni odvod po spremenljivki x je enak

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}\,.$$

Ker ima f v (a, b) lokalni minimum, je za majhne h-je predznak števca nenegativen. Če je $h > 0$ in gledamo limito, ko gre h proti 0, je diferenčni kvocient in s tem limita vedno večja ali enaka 0. Po drugi strani, če je $h < 0$ in gledamo limito, ko gre h proti 0, sta števec in imenovalec nasprotnega predznaka in zato je limita manjša ali enak 0. Torej je edina možnost

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = 0\,.$$

Podobno bi pokazali za parcialni odvod po spremenljivki y.
V primeru lokalnega maksimuma je dokaz podoben. ∎

Zgled 1.53 *Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

$$\begin{aligned} f_x &= 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y &= 2y = 0 \Rightarrow y = 0\,. \end{aligned}$$

Iz grafa funkcije f vemo, da v tej točki nastopi lokalni minimum funkcije.

Definicija 1.54 *Točka (a,b) za katero je*

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0\,,$$

je stacionarna točka.

Vsak lokalni ekstrem je stacionarna točka, medtem ko obratno ne velja, kar kaže zgled 1.55.

Zgled 1.55 *Naj bo $f(x,y) = xy$.*

Vidimo, da je $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, ampak točka $(0,0)$ ni lokalni ekstrem, saj so v vsaki njeni okolici točke, katerih funkcijske vrednosti so pozitivne in točke, katerih vrednosti so negativne. Tako stacionarno točko imenujemo sedlo.

Velja, da če v stacionarni točki funkcija f nima lokalnega ekstrema, tedaj ima f tam *sedlo*, a te trditve ne bomo izpeljali.

Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke, kjer nam drugi odvod pove, ali v stacionarni točki nastopi ekstrem, velja analogija za funkcije dveh spremenljivk, če so le-te dvakrat zvezno parcialno odvedljive.

Izrek 1.56 *(zadostni pogoj)*
Točka (a,b) naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kjer je D odprta množica. Nadalje, naj bo

$$f_{xx}(a,b) = A\,, \quad f_{xy}(a,b) = B\,, \quad f_{yy}(a,b) = C$$

in $H(a,b)$ Hessejeva matrika funkcije f v točki (a,b). Potem velja:

(i) če je $|H(a,b)| = AC - B^2 > 0$, tedaj je v (a,b) lokalni minimum, če je $A > 0$ in lokalni maksimum, kadar je $A < 0$,

(ii) če je $|H(a,b)| = AC - B^2 < 0$, tedaj je v (a,b) sedlo,

(iii) če je $|H(a,b)| = AC - B^2 = 0$, tedaj na podlagi drugih parcialnih odvodov ne morem sklepati o obstoju lokalnega ekstrema v (a,b).

Dokaz. Zapišimo Taylorjevo formulo za funkcijo f v okolici točke (a,b) do členov reda dva. Ker je (a,b) stacionarna točka, sta parcialna odvoda enaka 0, zato je

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + R_2\,.$$

Za dovolj majhne h in k je člen R_3 zanemarljiv in je predznak razlike

$$f(a+h,b+k) - f(a,b)$$

odvisen od predznaka izraza

$$g(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\,,$$

ki ga za $A \neq 0$ lahko preoblikujmo

$$g(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + \frac{B^2k^2 - B^2k^2}{A} = \frac{(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2}{A}\,.$$

Ločimo naslednje primere:

(i) Če je $AC - B^2 > 0$, morata biti A in C različna od 0 in enakega predznaka, zato je izraz $g(h,k)$ za vsak $(h,k) \neq (0,0)$ enakega predznaka kot A. Torej, če je $A > 0$, v točki (a,b) nastopi lokalni minimum in če je $A < 0$ je v (a,b) lokalni maksimum.

(ii) Če je $AC - B^2 < 0$, moramo ločiti dve možnosti in sicer je lahko vsaj eden od A in C različen od 0, kar pomeni da lahko preoblikujemo funkcijo $g(h,k)$ ali pa sta oba enaka 0.

Naj bo najprej $A \neq 0$. Potem je predznak izraza $g(h,k)$ odvisen od izbire h in k. Recimo, če je $k = 0$, tedaj ima $g(h,k)$ enak predznak kot A. Če pa je na primer $Ah = -Bk$, tedaj je predznak izraza $g(h,k)$ nasproten predznaku od A. Zato v točki (a,b) ne more biti lokalni ekstrem. Podobno pokažemo, če je $C \neq 0$.

Naj bosta sedaj $A = C = 0$, kar onemogoča preoblikovanje funkcije $g(h,k)$. Iz $AC - B^2 < 0$ sledi, da mora biti $B \neq 0$ in posledično je predznak izraza $g(h,k) = 2Bhk$ spet odvisen od izbire h in k. Če je $h = k$, je izraz enakega predznaka kot B, če pa je $h = -k$, tedaj je $g(h,k)$ ravno nasprotnega predznaka kot B in zato ni ekstrema v (a,b).

(iii) Če je $AC - B^2 = 0$, pri nekaterih h in k na predznak razlike $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ vpliva celo ostanek R_2. Če je recimo $A \neq 0$ in je $Ah + Bk = 0$, je $g(h,k) = 0$ in je $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ odvisna od ostanka R_2. Zato na podlagi drugih odvodov ne moremo sklepati o lokalnem ekstremu.

■

Zgled 1.57 *Pošči lokalne ekstreme funkcije*

$$f(x,y) = xy + \frac{y}{x} + \frac{2}{y}\,.$$

$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) & = & y - \dfrac{y}{x^2} = 0 \\ & & \qquad\qquad\quad \Rightarrow y(x^3-1)) = 0 \Rightarrow T_1(1,1), T_2(1,-1) \\ f_y(x,y) & = & x - \dfrac{2}{y^2} + \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2y}{x^3} & 1-\dfrac{1}{x^2} \\ & \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{4}{y^3} \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\det H(1,1) = 8 > 0$$

in

$$\det H(1,-1) = 8 > 0\,,$$

ima funkcija f v $(1,1)$ lokalni minimum, ter v $(1,-1)$ lokalni maksimum.

Zgled 1.58 *(Metoda najmanjših kvadratov)*
Naj bodo dane točke $A(0,0), B(1,3), C(2,5)$. Poišči linearno funkcijo, ki se najbolj prilega danim točkam tako, da je vsota kvadratov navpičnih odmikov najmajša.

Poglejmo metodo najmanjših kvadratov v splošnem, torej naj bodo (x_i, y_1), $i = 1, \ldots, n$ dane točke. Iščemo linearno funkcijo $y = kx + n$ tako, da bo vsota kvadratov navpičnih odmikov točk od premice najmanjša. Navpični odmik poljubne točke $(x_i, y_)$ od premice $y = k\,x + n$ je enak $|y_i - y| = |y_i - (k\,x_i + n)|$. Minimizirat moramo funkcijo

$$f(k,n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (k\,x_i + n))^2\,.$$

Za naš konkretni primer dobimo

$$\begin{array}{rcl} f(k,n) & = & n^2 + (3-k-n)^2 + (5-2k-n)^2 \\ & & \\ f_k(k,n) & = & -2(3-k-n) - 4(5-2k-n) = 2(5k+3n-13) = 0 \\ f_n(k,n) & = & 2n - 2(3-k-n) - 2(5-2k-n) = 2(3k+3n-8) = 0 \end{array}$$

$$k = \frac{5}{2},\ n = \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{5}{2}\,x + \frac{1}{6}\,.$$

Iskanje lokalnih ekstremov funkcij več spremenljivk je v veliki meri odvisno od Hessejeve matrike in v ta namen moramo definirati pozitivno in negativno definitnost simetrične matrike, le-ta pa je povezana s skalarnim produktom.

Definicija 1.59 *Naj bo A simetrična matrika reda n. Če za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ različen od $\mathbf{0}$ velja*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$$

pravimo, da je matrika A pozitivno definitna*. Če je*

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$$

rečemo, da je matrika A negativno definitna*.*

Dejansko se pozitivna oziroma negativna definitnost simetrične matrike preverja s pomočjo predznaka lastnih vrednosti, ki jih zaenkrat še ne poznamo, zato se lahko opremo samo na zgornjo definicijo.

Navedimo zdaj izrek, ki podaja zadostni pogoj za obstoj lokalnih ekstremov funkcij več spremenljivk.

Izrek 1.60 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ki je zvezna in zvezno parcialno odvedljiva do odvodov drugega reda. Nadalje naj bo $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ stacionarna točka funkcije f, torej za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja*

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = 0\,.$$

Tedaj velja:

(i) če je $H(\mathbf{a})$ pozitivno definitna matrika, tedaj ima funkcija f v točki $\mathbf{a}$ lokalni minimum,

(i) če je $H(\mathbf{a})$ negativno definitna matrika, tedaj ima funkcija f v točki $\mathbf{a}$ lokalni maksimum.

∎

Zgled 1.61 *Poišči lokalne ekstreme funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2\,.$$

Parcialni odvodi so $f_{x_i} = 2x_i$, zato je stacionarna točka $(0, 0, \ldots, 0)$. Hessejeva matrika (mešanih odvodov) je diagonalna matrika z 2 po diagonali, $H = 2I$, in za poljuben $\mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned} \langle H\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \langle 2I\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle 2(I\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle 2\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n 2x_i^2 > 0\,, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je H pozitivno definitna v poljubni točki, torej tudi v stacionarni točki in zato ima f v točki $(0, 0, \ldots, 0)$ lokalni minimum.

1.1.8 Odvod implicitne funkcije in vezani ekstremi

Pri realnih funkcijah ene spremenljivke smo videli, da enačba

$$F(x, y) = 0$$

lahko določa implicitno podano funkcijo $y = y(x)$, ni pa to nujno. Naslednji izrek, ki ga bomo zaradi zahtevnosti in obsega navedli brez dokaza, podaja pogoj za obstoj funkcije y.

Izrek 1.62 *(Izrek o implicitni funkciji) Naj bo $f(x, y)$ zvezna in diferenciabilna funkcija v okolici točke (a, b) in naj bo $f(a, b) = 0$. Če je $f_y(a, b) \neq 0$, obstaja odvedljiva funkcija $y = y(x)$, ki je definirana na neki okolici točke $a \in \mathbb{R}$ in zadošča pogojema*

$$y(a) = b \qquad \textit{in} \qquad f(x, y(x)) = 0\,.$$

∎

Posledica 1.63 *Naj $g(x, y) = 0$ zadošča pogojem izreka in določa eksplicitno podano funkcijo $y = y(x)$ na neki okolici točke a. Tedaj je*

$$y'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}\,,$$

kjer je $y(a) = b$.

Dokaz. Funkcijo $g(x, y(x))$ posredno odvajajmo po parametru x v točki a

$$g'(a) = g_x(a, b)\, x' + g_y(a, b)\, y'(a) = 0 \Rightarrow y'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}\,.$$

∎

Zgled 1.64 *Izračunaj odvod funkcije $y = y(x)$v točki $(1, 1)$, če je*

$$xy + 2x^2 y - 3 = 0\,.$$

V poljubni točki je odvod enak

$$y'(x) = -\frac{y + 4xy}{x + 2x^2} = -\frac{y(1 + 4x)}{x + 2x^2} = \frac{\frac{3}{x+2x^2}(1 + 4x)}{x + 2x^2} = -\frac{3(1 + 4x)}{(x + 2x^2)^2}\,.$$

Tako je odvod v točki $x = 1$

$$y'(1) = -\frac{15}{9}\,.$$

Tako kot vse do zdaj spoznane pojme, lahko tudi izreko implicitni funkciji posplošimo na funkcijo več spremenljivk, a tega ne bomo eksplicitno zapisali.

V nadaljevanju nas ne bodo zanimali lokalni ekstremi na celem odprtem območju D, temveč ekstremi na neki krivulji $K \subseteq D$, katere točke so v zvezi $g(x, y) = 0$. Poglejmo nekaj problemov, ki nas bodo zanimali.

1. Poišči največjo vrednost funkcije $f(x, y) = x^2 + 4y$ na elipsi $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
2. Poišči ekstrem funkcije $f(x, y, z) = xyz$, kjer točka (x, y, z) zadošča zvezi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. Poišči ekstrem funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ pri pogojih

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\
2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 3\,.
\end{aligned}
$$

Obravnavajmo najprej funkcije dveh spremenljivk, naj bo torej $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in naj enačba $g(x, y) = 0$ določa neko krivuljo K na območju D. Recimo, da funkcija f doseže ekstrem v točki $(a, b) \in K$, torej je $g(a, b) = 0$. Če g zadošča pogojem izreka o implicitni funkciji, tedaj $g(x, y) = 0$ na neki okolici točke a določa zvezno odvedljivo funkcijo $y = y(x)$:

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)\,.$$

S tem postane $f(x, y) = f(x, y(x))$ funkcija ene spremenljivke na okolici točke a. Ker ima funkcija f ekstrem v točki a, mora biti odvod v tej točki enak 0:

$$
\begin{aligned}
(f(x, y(x))'(a) &= 0 \\
f_x(a, b)x'(a) + f_y(a, b)y'(a) &= 0 \\
f_x(a, b) \cdot 1 + f_y(a, b)\left(-\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Če je $g_y(a, b) \neq 0$, tedaj je

$$f_x(a, b) - \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} g_x(a, b) = 0\,.$$

Označimo $\dfrac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} = \lambda$, s čimer dobimo pogoja

$$
\begin{aligned}
f_x(a, b) - \lambda\, g_x(a, b) &= 0 \\
f_y(a, b) - \lambda\, g_y(a, b) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Upoštevajoč pogoj $g(a,b)=0$ potemtakem iščemo lokalne ekstreme funcije

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)\,.$$

S tem smo izpeljali naslednji izrek.

Izrek 1.65 *Ekstreme funkcije $f(x,y)$ pri pogoju $g(x,y)=0$ iščemo tako, da na običajen način iščemo ekstreme funkcije*

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)\,.$$

S tem dobimo vse kandidate za eksreme razen tistih, za katere je

$$g(a,b)=0,\; g_y(a,b)=0,\; g_x(a,b)=0\,.$$

Zgled 1.66

Poišči največjo vrednost funkcije $f(x,y)=x^2+4y$ na elipsi $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Nastavimo funkcijo F in poiščemo njene stacionarne točke:

$$F(x,y,\lambda)=x^2+4y-\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)$$

$$\begin{aligned}
F_x &= 2x-\tfrac{\lambda x}{2}=0\\
F_y &= 4-\tfrac{2\lambda y}{9}=0\\
F_\lambda &= \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0\,.
\end{aligned}$$

Iz 1. pogoja sledi

$$x\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)=0\,,$$

zato ločimo dve možnosti:

1.) $x=0$
Upoštevamo to v preostalih dveh pogojih

$$2-\tfrac{\lambda}{2}=0$$
$$-\tfrac{y^2}{9}+1=0$$

in dobimo $y=\pm3$, tako da sta možni rešitvi $T_1(0,3)$ in $T_2(0,-3)$.

2.) $\lambda = 2$
V tem primeru dobimo sistem dveh enačb

$$1 - \tfrac{y}{9} = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0\,,$$

ki nima rešitve, saj bi za $y = 9$ moral biti $x^2 = -32$.

Za dobljeni točki T_1 in T_2 poiščemo pripadajoči funkcijski vrednosti

$$f(0,3) = 12, f(0,-3) = -12$$

in vidimo, da je največja vrednost funkcije f na dani elipsi doseženi v točki $T_1(0,3)$.

Izrek 1.65 lahko posplošimo na funkcije več spremenljivk.

Izrek 1.67 *Ekstreme funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pri pogojih $g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0$, $i = 1,2,\ldots m < n$ iščemo tako, da iščemo lokalne ekstreme funkcije*

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

Zgled 1.68 *Poišči ekstrem funkcije $f(x,y,z) = xyz$, kjer točka (x,y,z) zadošča zvezi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Nastavimo funkcijo F in poiščemo njene stacionarne točke:

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
F_x &= yz - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{2x} \\
F_y &= xz - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{xz}{2y} \\
F_z &= xy - 2\lambda z = 0 \\
F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Iz prvih dveh pogojev smo izrazili λ, zato je

$$\begin{aligned}
\frac{yz}{x} &= \frac{xz}{y} \\
\frac{z(y^2 - x^2)}{xy} &= 0 \quad \Rightarrow \quad z(y^2 - x^2) = 0
\end{aligned}$$

Ločimo dve možnosti:

1.) $z = 0$

Če je $z = 0$, tedaj je $xy = 0$, zato spet ločimo dve možnosti:

1.1) $x = 0$

V tem primeru je $y^2 = 1$ in rešitvi sta $T_1(0, 1, 0)$ in $T_2(0, -1, 0)$.

1.2) $y = 0$

Podobno kot prej je zdaj $x^2 = 1$ in rešitvi sta $T_3(1, 0, 0)$ in $T_4(-1, 0, 0)$.

2.) $x^2 - y^2 = 0$

V tem primeru je $(x - y)(x + y) = 0$, zato ponovno ločimo dve možnosti:

2.1) $x = y$

Z upoštevanjem $x = y$ dobimo sistem treh enačb

$$\lambda = \frac{z}{2}$$

$$x^2 - 2\lambda z = 0$$

$$2x^2 + z^2 = 1\,,$$

katerega rešitev so točke

$$T_5\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,,$$
$$T_6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,,$$
$$T_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,,$$
$$T_8\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,.$$

2.2) $x = -y$

Podobno kot prej je z upoštevanjem $x = -y$ dobimo

$$\lambda = -\frac{z}{2}$$

$$-x^2 - 2\lambda z = 0$$

$$2x^2 + z^2 = 1\,,$$

in rešitev so točke

$$
\begin{aligned}
&T_9\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\\
&T_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\\
&T_{11}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\\
&T_{12}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Izračunamo funkcijske vrednosti funkcije f v vseh 12 točkah in vidimo, da je v točkah T_5, T_7, T_{10}, T_{12} dosežen maksimum, v točkah T_6, T_8, T_9, T_{11} pa minimum.

Zgled 1.69 *Poišči ekstrem funkcije* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ *pri pogojih*

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2\\
2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 3\,.
\end{aligned}
$$

Nastavimo funkcijo F in poiščemo njene stacionarne točke:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\lambda_2) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-\lambda_1(x_1+x_2-x_3+2x_4-2)-\lambda_2(2x_1-x_2+x_3-3x_4-3)\,.$$

$$
\begin{aligned}
F_{x_1} &= 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0\\
F_{x_2} &= 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0\\
F_{x_3} &= 2x_3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\
F_{x_3} &= 2x_4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0\\
F_{\lambda_1} &= x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2 = 0\\
F_{\lambda_2} &= 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Dobimo 6×6 sistem linearnih enačb katerega rešitev je

$$x_1 = -\frac{38}{23},\; x_2 = \frac{5}{23},\; x_3 = -\frac{5}{23},\; x_4 = -\frac{1}{23}\,.$$

1.2 Vektorske funkcije

V tem razdelku bomo zelo na kratko in površinsko pogledali vektorske funkcije vektorske spremenljivke, to so funkcije ki slikajo iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$. Zanimala nas bo predvsem diferenciabilnost takih funkcij, ki nas bo pripeljala do reševanja sistemov nelinearnih enačb. Nazadnje si bomo kot poseben primer skalarnih in vektorskih funkcij pogledali skalarna in vektorska polja. pogle

1.2.1 Diferenciabilnost in nelinearni sistemi enačb

Sedaj nas bodo zanimale preslikave

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,,$$

ki jih imenujemo vektorske funkcije vektorske spremenljivke. Taka preslikava določa m funkcij

$$F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\,.$$

Zveznost vektorske funkcije $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ je direktno odvisna od zveznosti posamezne skalarne funkcije $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nas bo bolj zanimala diferenciabilnost vektorske funkcije.

Definicija 1.70 *Naj bo D odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Funkcija $F : D \to \mathbb{R}^m$ je diferenciabilna v točki $\mathbf{a} \in D$, če obstajata matrika J reda $m \times n$ in vektorska funkcija $O = (o_1, o_2, \ldots, o_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taki, da je*

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + J\mathbf{h} + O(\mathbf{h})\,,$$

pri čemer je

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\sqrt{(o_1(\mathbf{h}))^2 + \cdots + (o_m(\mathbf{h}))^2}}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0\,.$$

F je diferenciabilna na D, ko je diferenciabilna v vsaki točki območja D.

Izrek 1.71 *Funkcija $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferenciabilna v točki $\mathbf{a}$ odprtega območja $D \in \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko so v točki $\mathbf{a}$ diferenciabilne vse funkcije $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.*

Dokaz.

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}\mathbf{h} + \mathbf{O}(\mathbf{h})$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \\ f_2(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_{11} & \ldots & j_{1n} \\ j_{21} & \ldots & j_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ j_{m1} & \ldots & j_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1(\mathbf{h}) \\ o_2(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ o_m(\mathbf{h}) \end{bmatrix}$$

Poljubna vrstica je

$$f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f_i(\mathbf{a}) + (j_{i1}h_1 + \cdots + j_{in}h_n) + o_i(\mathbf{h})\,,$$

kar pomeni, da bo F diferenciabilna, če je poljuben element matrike J parcialni odvod

$$j_{ik} = (J)_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,.$$

■

Posledica 1.72 *Matrika J je matrika parcialnih odvodov*

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}\,,$$

ki se imenuje Jacobijeva matrika.

Posledica 1.73 *F je diferenciabilna, če so funkcije f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ zvezno parcialno odvedljive.*

Če je F diferenciabilna v točki a, potem jo lahko lineariziramo v okolici točke a

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \doteq \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}\mathbf{h}\,.$$

Linearizacija vektorske funkcije F se uporablja pri reševanju sistemov nelinearnih enačb. Poglejmo, kako lahko pristopimo k reševanju nelinearnega sistema n enačb z n neznankami podanega z:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,.$$

Reševanje nelinearnih sistemov je zelo težek problem in se rešuje z uporabo numeričnih metod. Diferenciabilnost vektorske funkcije nam omogoča naslednji pristop k reševanju takih sistemov. Nelinerani sistem najprej zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Funkcije f_i naj bodo komponente vektorske funkcije F, ki naj bo diferenciabilne na območju D. Izberimo poljubno točko $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ območja D, ki je po možnosti blizu zaenkrat še neznane rešitve nelinearnega sistema. Ideja je v tem, da funkcijo F lineariziramo v okolici točke $\mathbf{a}$

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \doteq F(\mathbf{a}) + J(\mathbf{a})\mathbf{h}$$

oziroma, če $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, tedaj je

$$F(x) \doteq F(\mathbf{a}) + J(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})\,.$$

Za nelinearni sistem je $F(\mathbf{x}) = 0$, zato je v primeru, da je Jacobijeva matrika obrnljiva, rešitev prvega koraka linearizacije enaka

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - J^{-1}(\mathbf{a})F(\mathbf{a})\,.$$

Postopek ponavljamo, s čimer dobimo zaporedje približkov in če je le-to konvergentno, dobimo rešitev nelinearnega sistema na zahtevano število decimalnih mest natančno.

Zgled 1.74 *Numerično reši sistem nelinearnih enačb*

$$xy^2 - x + y = 1$$

$$2x + xy = 6\,.$$

Nastavimo funkcijo F in izberemo poljubno začetno točko, recimo $\mathbf{a}_0 = (0, 0)$.

$$F(x, y) = (xy^2 - x + y - 1, 2x + xy - 6)\,.$$

Rešujemo enačbo $F(x, y) = (0, 0)$, pri čemer potrebujemo Jacobijevo matriko

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 - x + y - 1) & \frac{\partial}{\partial x}(2x + xy - 6) \\ \\ \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - x + y - 1) & \frac{\partial}{\partial y}(2x + xy - 6) \end{bmatrix}$$

in njen inverz je

$$J^{-1}(x,y) = \frac{1}{(y^2-1)x-(y+2)(2xy+1)} \begin{bmatrix} x & -2xy-1 \\ -y-2 & y^2-1 \end{bmatrix}.$$

Prvo točko iteracije $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1)$ dobimo iz prvega iteracijskega koraka, kjer upoštevamo, da je začetna točka $\mathbf{a}_0 = (0,0)$

$$(x_1, y_1) = (0,0) - J^{-1}(0,0)F(0,0)$$

oziroma v matrični obliki

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(0,0) \\ f_2(0,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Postopek ponovimo na dobljeni točki $\mathbf{a}_1 = (3,4)$, s čimer dobimo naslednjo točko $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{-1}{105} \begin{bmatrix} 3 & -25 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{4}{35} \begin{bmatrix} -13 \\ -9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{53}{35} \\ \frac{104}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.51 \\ 2.97 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

S ponavljanjem iteracijskega postopka in ob upoštevanju, da rezultate zaokrožamo na dve decimalni mesti, dobimo

$$\mathbf{a}_3 = (1.66, 1.47),\ \mathbf{a}_4 = (1.95, 1),\ \mathbf{a}_5 = (2, 1),\ \mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_5\,.$$

To pomeni, da ob zaokrožanju na dve decimalni mesti pridemo do rešitve v petih iteracijskih korakih. Dobljena rešitev je v tem primeru tudi eksaktna rešitev sistema, v splošnem je natančnost rešitve določena z izbranim številom decimalnih mest pri zaokroževanju.

1.2.2 Operacije na skalarnih in vektorskih poljih

Skalarno polje f je preslikava, ki deluje iz

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,.$$

Vektorsko polje f je preslikava, ki deluje iz

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,.$$

Na skalarnih poljih smo ze vpeljali operacijo gradienta, ki skalarnemu polju f priredi vektorsko polje, katerega komponente so posamezni parcialni odvodi polja f. Za skalarni polji f in g, ter skalarja (konstanti) λ in μ ni težko pokazati naslednjih lastnosti gradienta:

(i) $\mathrm{grad}(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda \mathrm{grad} f + \mu \mathrm{grad} g$,

(ii) $\mathrm{grad}(fg) = f \mathrm{grad} g + g \mathrm{grad} f$.

Vpeljimo diferencialni operator *nabla* na sledeč način

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)\,.$$

Tedaj je gradient

$$\mathrm{grad} f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)\,.$$

Na vektorskih poljih pa lahko s pomočjo diferencialneg operatorja nabla vpeljemo operaciji rotorja in divergence.

Definicija 1.75 *Naj bo* $\mathbf{F}$ *vektorsko polje. Tedaj je* divergenca *vektorskega polja* $\mathbf{F}$ *enaka*

$$div\,\mathbf{F} = \langle \nabla, \mathbf{F} \rangle\,.$$

Rotor *vektorskega polja* $\mathbf{F}$ *je enak*

$$rot\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}\,.$$

Medtem ko je divergenca skalarno polje, je rotor vektorsko polje.

Iz definicij sledijo naslednje lastnosti obeh polj. Za vektorsko polje $\mathbf{F}$, skalarja λ, μ in skalarno polje f velja:

(i) $\mathrm{div}\,(\lambda\, \mathbf{F} + \mu\, \mathbf{G}) = \lambda\, \mathrm{div}\, \mathbf{F} + \mu\, \mathrm{div}\, \mathbf{G}$,

(ii) $\mathrm{div}\,(f\mathbf{F}) = f \mathrm{div}\, \mathbf{F} + \langle \mathbf{F}, \mathrm{grad} f \rangle$.

Podobno velja za rotor

(i) $\mathrm{rot}\,(\lambda\,\mathbf{F} + \mu\,\mathbf{G}) = \lambda\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \mu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{G}$,

(ii) $\mathrm{rot}\,(f\mathbf{F}) = f\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \mathrm{grad}\,f \times \mathbf{F}$.

Zgled 1.76 *Izračunaj obe operaciji vektorskega polja*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - y^2, xz - yz, x^2)\,.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(x^2 - y^2, xz - yz, x^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\\ &= 2x - z\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(x^2 - y^2, xz - yz, x^2) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & xz - yz & x^2 \end{vmatrix}\\ &= (1,0,0)(-x+y) - (0,1,0)(2x) + (0,0,1)(z - 2y)\\ &= (-x+y, -2x, z-2y)\,.\end{aligned}$$

1.3 Uvod v diferencialno geometrijo

Pogledali si bomo krivulje in ploskve v prostoru, ter nekah osnovnih geometrijskih pojmov v povezavi z njimi. Ker je odvod tukaj bistvenega pomena, imenujemo to področje diferencialna geometrija.

1.3.1 Krivulje v prostoru

Naj bo K krivulja v prostoru $\mathbb{R}^3$. Vsaka točka na krivulji K je določena s koordinatami (x,y,z). Krivulja je lahko podana z zveznima funkcijama $y = y(x)$ in $z = z(x)$. Ko x preteče vrednosti na nekem intervalu, pripadajoče točke $T(x, y(x), z(x))$ ležijo na krivulji K.

Krivulja K je lahko podana tudi implicitno kot presek dveh ploskev $F(x,y,z) = 0$ in $G(x,y,z) = 0$.

Najbolj običajen je parametrični način podajanja krivulje. Če uspemo krivuljo K predstaviti kot sliko neke podmnožice realnih števil (običajno intervala) pravimo, da smo krivuljo K *parametrizirali.* Natančneje, naj bodo

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

zvezne funkcije spremenljivke t na intervalu $[\alpha, \beta]$. Za vsak t iz tega intervala dobimo neko točko krivulje K. Spremenljivko t običajno imenujemo *parameter.* S tem v bistvu dobimo vektorsko funkcijo skalarne spremenljivke t, ki jo označimo $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\,.$$

Zgled 1.77 *Enačba vijačnice v parametrični obliki*

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)\,, t \in \mathbb{R},\ a, b > 0\,.$$

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= b\,t \end{aligned}$$

Ker je $x^2 + y^2 = a^2$ in $z = bt$, leži vijačnica na plašču valja s polmerom a.

V nadaljevanju si bomo pogledali tangento in normalno ravnino krivulje.

Naj bo krivulja K dana s parametrizacijo

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Na krivulji K izberimo poljubno točko $T = \mathbf{r}(a)$. Če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(a+h) - \mathbf{r}(a)}{h}\,,$$

je ta limita vektor, ki ga imenujemo *tangentni vektor* na krivuljo K v točki a in ga označimo $\mathbf{r}'(a)$. Če so funkcije $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ odvedljive v $t = a$, tedaj je

$$\mathbf{r}'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a))\,.$$

Omenimo, da se običajno za odvod parametra namesto oznake s črtico uporablja oznaka s piko:

$$\mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)\,.$$

Definicija 1.78 *Premica, ki poteka skozi točko $T = \mathbf{r}(a)$ krivulje K v smeri vektorja $\mathbf{r}'(a)$, je* tangenta *na krivuljo K v točki a.*

Poglejmo, kako poiščemo enačbo tangente. Naj bo (x, y, z) poljubna točka na tangenti, tedaj je

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= \mathbf{r}(a) + \lambda\, \mathbf{r}'(a) \\
(x, y, z) &= (x(a), y(a), z(a)) + \lambda\, (x'(a), y'(a), z'(a))\,.
\end{aligned}$$

Eliminiramo λ in dobimo

$$\frac{x - x(a)}{x'(a)} = \frac{y - y(a)}{y'(a)} = \frac{z - z(a)}{z'(a)}\,.$$

Zgled 1.79 *Poišči enačbo tangente na vijačnico v točki* $(a, 0, 0)$.

Iz $(a\cos t, a\sin t, b\,t) = (a, 0, 0)$ sledi, da je $t = 0$. Poiščimo smer tangente v poljubni točki

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

in še v dani točki

$$\mathbf{r}'(0) = (0, a, b)\,.$$

Enačba tangente je

$$(x, y, z) = (a, 0, 0) + \lambda\, (0, a, b)$$

oziroma v odsekovni obliki

$$\frac{y}{a} = \frac{z}{a},\ x = a\,.$$

Recimo, da je krivlja K podana implicitno, kot presek dveh ploskev

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{in} \quad G(x, y, z) = 0\,.$$

Naj bo $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \to K$ parametrizacija krivulje K. Tedaj sta ploskvi odvisni od parametra t:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \text{in} \quad G(x(t), y(t), z(t)) = 0\,,\ t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Odvajajmo F po t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x}\, x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}\, z'(t) &= 0 \\
\langle \text{grad}, \mathbf{r}'(t)\rangle &= 0\,.
\end{aligned}$$

Na podoben način dobimo

$$\langle \text{grad} G, \mathbf{r}'(t)\rangle = 0\,.$$

Če je

$$\mathrm{grad}F \times \mathrm{grad}G \neq 0\,,$$

tedaj je

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda\,(\mathrm{grad}F \times \mathrm{grad}G),.$$

S tem se enačba tangente na krivuljo K v točki (a,b,c) glasi

$$(x,y,z) = (a,b,c) + \lambda\,(\mathrm{grad}F \times \mathrm{grad}G)\,.$$

Zgled 1.80 *Poišči enačbo tangente na krivuljo K v točki $(6,9,9)$, če je K določena kot presek ploskev*

$$x^2 = 4z \quad \textit{in} \quad x^3 = 24z\,.$$

Poiščimo oba gradienat v dani točki

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(x^2-4z) &= (2x,0,-4) \\ &= (12,0,-4)\,, \\[1em] \mathrm{grad}(x^3-24z) &= (3x^2,0,-24) \\ &= (108,0,-24)\,. \end{aligned}$$

Njun vektorski produkt je enak

$$(12,0,-4)\times(108,0,-24) = 48((3,0,-1)\times(9,0,-2)) = (0,-144,0) = -144(0,1,0)\,.$$

Tangenta ima smer vektorja $(0,1,0)$ in njena enačba je

$$(x,y,z) = (6,9,9) + \lambda(0,1,0)$$

oziroma v odsekovni obliki

$$y = \lambda + 9, x = 6, z = 9\,.$$

Definicija 1.81 Normalna ravnina *krivulje K v točki $T = \mathbf{r}(a) \in K$ je ravnina, ki poteka skozi točko T in je pravokotna na tangentni vektor.*

Normala *krivulje K v točki $T \in K$ je vsaka premica, ki leži v normalni ravnini in poteka skozi točko T.*

Enačba normalne ravnine parametrično podane krivulje K je enaka

$$\langle((x,y,z)-\mathbf{r}(a)),\mathbf{r}'(t)\rangle = 0\,.$$

Če je krivulja K podana implicitno kot presek ploskev F in G, tedaj je enačba normalne ravnine v točki (a,b,c) enaka

$$\langle((x,y,z)-(a,b,c)),(\mathrm{grad}F \times \mathrm{grad}G)\rangle = 0\,.$$

Zgled 1.82 *Dana je vijačnica*

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)\,, t \in \mathbb{R},\ a, b > 0\,.$$

Poišči enačbo normalne ravnine v točki $\mathbf{r}(0)$.

Vemo že, da je

$$\mathbf{r}(0) = (a, 0, 0) \quad \text{in} \quad \mathbf{r}'(0) = (0, a, b)\,,$$

zato je enačna normalne ravnine v točki $(a, 0, 0)$ enaka

$$\langle ((x, y, z) - (a, 0, 0)), (0, a, b) \rangle = 0$$

$$ay + bz = 0,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Poglejmo, kako izračunamo dolžino loka na krivulji oziroma ločno dolžino krivulje K, podane parametično

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\,, \quad t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Na podoben način, kot smo to naredili pri izračunu loka funkcije ene spremenljivke, razdelimo interval $[\alpha, \beta]$ na n podintervalov

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta\,.$$

Pripadajoče vrednosti na krivulji K povežemo z daljicami, s čimer dobimo poligonsko črto, katere dolžina je

$$\overline{T_0 T_n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{T_{k-1} T_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}\,.$$

Če je $t_k - t_{k-1} = \delta_k$, tedaj z uporabo Lagrangeovega izreka dobimo

$$\overline{T_0 T_n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_k)\delta_k)^2 + (y'(\xi_k)\delta_k)^2 + (z'(\eta_k)\delta_k)^2}\,.$$

Ker je $(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t) = \langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle$, je smiselna naslednja definicija.

Definicija 1.83 *Naj bo K krivulja v prostoru $\mathbb{R}^3$ podana s parametrizacijo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\,, \quad t \in [\alpha, \beta]$. Tedaj je* ločna dolžina *krivulje K, $l(K)$, enaka*

$$l(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle}\, dt\,.$$

V primeru, ko je krivulja podana eksplicitno z enačbama $y = y(x)$ in $z = z(x)$, $x \in [a, b]$, dobimo

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{1 + (y(x)')^2 + (z(x)')^2}\, dx\,.$$

Zgled 1.84 *Poišči dolžino enega zavoja vijačnice.*

$$\begin{aligned} l(K) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t)\rangle}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\langle(-a\sin t, a\cos t, b), (-a\sin t, a\cos t, b)\rangle}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\,. \end{aligned}$$

1.3.2 Ploskve v prostoru

Ploskve v prostoru $\mathbb{R}^3$ so lahko podane na različne načine:

(i) implicitno z enačbo $F(x, y, z) = 0$ ali eksplicitno z enačbo $z = f(x, y)$,

(ii) parametrično, kjer je ploskev podana kot slika odprte množice $D \subseteq \mathbb{R}^2$ s preslikavo $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. (Pri tem mora biti preslikava $\mathbf{r}$ zvezna in injektivna.)

Na primer:

(i) $z = x^2 + y^2$,

(ii) $\mathbf{r}(u, v) = (u\,\cos v, u\,\sin v, u^2)$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Zgled 1.85 *Zapiši enačbo plašča neskončnega valja s polmerom a v parametrični obliki.*

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (a\,\cos\varphi, a\,\sin\varphi, z),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}\,.$$

Zgled 1.86 *Zapiši enačbo sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v parametrični obliki.*

$$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,.$$

Naj bo ploskev P podana s parametrizacijo $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Naj bo $(u_0, v_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ poljubna točka in naj bo parameter $v = v_0$ konstanten. Potem vse točke, za katere je $v = v_0$ leže na krivulji $\mathbf{r}(u, v_0)$. Podobno točke, za katere je u konstanten, leže na krivulji $\mathbf{r}(u_0, v)$. Ti dve krivulji imenujemo *koordiantni krivulji.* Skozi vsako točko na ploskvi potekata dve koordinatni krivulji. Tako na primer za sfero dobimo kot koordinatne krivulje poldnevnike (meridiane), ko je $\vartheta = \vartheta_0$ in vzporednike, ko je $\varphi = \varphi_0$. Odvod koordinatnih krivulj je enak

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(u) &= \mathbf{r}(u, v_0) \\
\mathbf{h}'(u) &= (x_u(u, v_0), y_u(u, v_0), z_u(u, v_0)) = \mathbf{r}_u(u, v_0) \\
\mathbf{k}(v) &= \mathbf{r}(u_0, v) \\
\mathbf{k}'(v) &= (x_v(u_0, v), y_v(u_0, v), z_v(u_0, v)) = \mathbf{r}_v(u_0, v)\,.
\end{aligned}$$

Vidimo, da sta parcialna odvoda tangentna vektorja ustrezne koordinatne krivulje v točki $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Pravimo, da je parametrizacija ploskve P *regularna*, če so funkcije $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ zvezno parcialno odvedljive in v vsaki točki $(u, v) \in D$ velja

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq 0\,.$$

Definicija 1.87 *Naj bo ploskev P podana z regularno parametrizacijo $\mathbf{r}(u, v)$.* Normalni vektor *ploskve P v točki $T = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, $\mathbf{n}(u_0, v_0)$ je enak*

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\,.$$

Ravnino skozi točko T z normalo $\mathbf{n}$ imenujemo tangentna ravnina *ploskve P v točki T.*

Enačba tangentne ravnine v točki $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ je enaka

$$\langle((x, y, z) - \mathbf{r}(u_0, v_0)), \mathbf{n}(u_0, v_0)\rangle = 0$$

$$\langle((x, y, z) - \mathbf{r}(u_0, v_0)), \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\rangle = 0\,,$$

kar je enako mešanemu produktu treh vektorjev

$$((x, y, z) - \mathbf{r}(u_0, v_0)), \mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)) = 0\,,$$

ki je enak determinanti matrike, katere vrstice so komponente posameznega vektorja.

Zgled 1.88 *Zapiši enačbo tangentne ravnine (enotske) sfere v točki* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) &= (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta)\\
\mathbf{r}(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) &= (0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})\,.\\[1em]
\mathbf{r}_\varphi(\varphi,\vartheta) &= (-\sin\varphi\cos\vartheta, \cos\varphi\cos\vartheta, 0)\\
\mathbf{r}_\varphi(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) &= (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)\,,\\[1em]
\mathbf{r}_\vartheta(\varphi,\vartheta) &= (-\cos\varphi\sin\vartheta, -\sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)\\
\mathbf{r}_\vartheta(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) &= (0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left((x,y,z,) - ((0,\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left((-\tfrac{\sqrt{2}}{2},0,0) \times (0,-\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2})\right)\right\rangle &= 0\\
\left\langle \left(x, y-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, z-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right\rangle &= 0\\
y+z &= \sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

Poglejmo, kako se izraža tangentna ravnina implicitno podane ploskve, t.j. z enačbo $F(x,y,z) = 0$. Ploskev P parametriziramo z regularno parametrizacijo $\mathbf{r}(u,v)$

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in P\,, \quad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

oziroma

$$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0\,.$$

Izračunajmo parcialna odvoda funkcije F:

$$\begin{aligned}
F_u &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 0\\
&\langle \mathrm{grad} F, \mathbf{r}_u\rangle = 0\\
F_v &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 0\\
&\langle \mathrm{grad} F, \mathbf{r}_v\rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

Ker je $\mathrm{grad}F$ pravokoten na oba parcialna odvoda, ima smer njunega vektorskega produkta

$$\mathrm{grad}F = \lambda(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,.$$

Zato je enačna tangentne ravnine na implicitno podano ploskev $F(x,y,z) =$ v točki $T = (a,b,c)$ enaka

$$\langle ((x,y,z) - (a,b,c))\,, \mathrm{grad}F(a,b,c)\rangle = 0\,.$$

Zgled 1.89 *Zapiši enačbo tangentne ravnine na (enotsko) sfero v točki* $(1,1,1)$.
Enačba enotske sfere je

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

in njen grafient v dani točki je

$$\mathrm{grad}F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \mathrm{grad}F(1,1,1) = 2(1,1,1)\,.$$

Enačna tangentne ravnine je enaka

$$\begin{aligned} \langle ((x,y,z) - (1,1,1))\,, (1,1,1) \rangle &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Definicija 1.90 *Premica skozi točko T na ploskvi P v smeri normalnega vektorja se imenuje* normala *na ploskev P v točki T.*

Če je ploskev dana z regularno parametrizacijo, tedaj je normala na ploskev v točki $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ določena z enačbo

$$(x,y,z) = \mathbf{r}(u_0,v_0) + \lambda\,(\mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0))\,.$$

V primeru implicitno podane ploskve, je enačba normale v točki (a,b,c) določena z enačbi

$$(x,y,z) = (a,b,c) + \lambda\,\mathrm{grad}F(a,b,c)\,.$$

Zgled 1.91 *Zapiši enačbo normale na ploskev $z(x,y) = x^2 - y^2$ v točki* $(2,1)$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (2,1,3) + \lambda\ (2x, -2y, -1)\,(2,1,3) \\ (x,y,z) &= (2,1,3) + \lambda\,(4,-2,-1) \\ (x,y,z) &= (2,1,3) + \lambda\,(4,-2,-1) \\ x &= 2 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x-2}{4} \\ y &= 1 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-y+1}{2} \\ z &= 3 - \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-z+3}{2}\,. \end{aligned}$$

Enačba normale je tako enaka

$$\frac{x-2}{4} = \frac{-y+1}{2} = \frac{-z+3}{2}\,.$$

1.4 Naloge

1.4.1 Definicijsko območje in graf

1. Poišči in skiciraj definicijsko območje funkcije dveh spremenljivk:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-x}\,,$

   (b) $f(x,y) = \ln(x\ln(y-x))\,,$

   (c) $f(x,y) = \operatorname{asin}(1-y) + \operatorname{asin}\dfrac{y}{x^2}\,.$

2. S pomočjo nivojnic in prerezov skiciraj graf funkcije:

   (a) $f(x,y) = 4x^2 + y^2\,,$

   (b) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6\,,$

   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2\,.$

1.4.2 Zveznost in limita

1. Ali je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (0,0) \end{cases}$$

   zvezna.

2. Ali je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (0,0) \end{cases}$$

   zvezna.

3. Določi vrednost funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki $(0,0)$ tako, da bo le ta zvezna, če je

$$g(x,y) = \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   za vsak $(x,y) \neq (0,0)$.

1.4.3 Parcialni odvodi in totalni diferencial

1. Poišči parcialna odvoda funkcije
$$f(x,y) = (x^3 + 2y^2 - 4x)^2 \,.$$

2. Poišči parcialna odvoda funkcije
$$f(x,y) = x \operatorname{atan}(xy) \,.$$

3. Dana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (0,0), . \end{cases}$$
   (a) Ali je f parcialno odvedljiva?
   (b) Ali je f zvezno parcialno odvedljiva?

4. Z diferencialom izračunaj približno vrednost izrazov:
   (a) $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98}) - 1\,.$
   (b) $\dfrac{0.97 \cdot 1.04}{0.99}\,.$

5. Za koliko se približno spremeni prostornina kozarca v obliki stožca z višino 10 cm in polmerom 5 cm, če se višina poveča za 3 mm, premer pa zmanjša za 1 mm.

6. Če ima polinom $x^2 + ax + b$ realni ničli, potem funkcija g paru (a,b) priredi večjo od obeh ničel polinoma.
   (a) Poišči definicijsko območje funkcije g.
   (b) Izračunaj približno vrednost v točki $(-1.01, -1.97)$.

7. Če ima polinom $x^2 + ax + b$ realni ničli, potem funkcija g paru (a,b) priredi večjo od obeh ničel polinoma.
   (a) Poišči definicijsko območje funkcije g.
   (b) Izračunaj približno vrednost v točki $(-1.01, -1.97)$.

1.4.4 Posredno odvajanje in Taylorjeva formula

1. Izračunaj odvod funkcije $f(x) = (x^2+1)^{\log x}$.
2. Izračunaj odvod funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$, če je $x = s - 2t$ in $y = 2s + t$.
3. (a) Izraz $x\,z_x + y\,z_y$ pretvori v polarne koordinate.
   (b) Izračunaj zgornji izraz za $z = f(\frac{y}{x})$, kjer je f poljubna odvedljiva funkcija.
4. Naj funkcija $f(x,y) = 2xy + x^2$ opisuje temperaturno porazdelitev v ravnini.
   (a) Izračunaj smerni odvod funkcije v smeri vektorja $(1,1)$.
   (b) Določi smer, v kateri temperatura v točki $(1,1)$ najhitreje narašča.
5. Dana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (0,0), . \end{cases}$$

   Pokaži, da mešana parcialna odvoda v točki $(0,0)$ nista enaka. Utemelji zakaj.
6. Razvij funkcijo $f(x,y) = x^3 + xy^2$ v Taylorjevo vrsto do členov reda 2 v okolici točke $(2,1)$.

1.4.5 Ekstremi funkcij dveh spremenljivk

1. Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy\,.$$

2. Poišči ekstrem funkcije $f(x,y,z) = xyz$, kjer točka (x,y,z) zadošča zvezi $x^2+y^2+z^2 = 1$.
3. Med vsemi stožci s površino 4π poišči tistega z največjo prostornino.
4. Poišči globalni ekstrem funkcije $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ na krogu

$$x^2 + y^2 \leq 4\,.$$

5. Poišči ekstrem funkcije $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ pri pogojih

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

1.4.6 Vektorske funkcije vektorske spremenljivke

1. Dana je funkcija $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (e^x \cos x, e^x \sin x)\,.$$

   a) Kam se preslika pravokotnik $[1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
   b) Kam se preslika okolica točke $T(\ln 3, \frac{\pi}{6})$.

2. Zapiši Jacobijevo matriko za sferne koordinate.

3. Zapiši Jacobijevo matriko za cilindrične koordinate

$$x(r, \varphi, z) = r \cos\varphi,\; y(r, \varphi, z) = r \sin\varphi,\; z(r, \varphi, z) = z\,,$$

   kjer je $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$.

1.4.7 Uvod v diferencialno geometrijo

1. Krivulja K je podana s parametrizacijo

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2}),\; t \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) V točki $T(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ izračunaj enačbo tangente in normalne ravnine.
   (b) Izračunaj ločno dolžino med točkama $T(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ in $T'(0, 0, 0)$.

2. Krivulja K je dana kot presek ploskev

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 - 2x &= 0\,. \end{aligned}$$

   Poišči enačbo tangente v točki $(0, 0, 2)$.

3. Krivulja K je podana eksplicitno z

$$x^2 = 3y \quad \text{in} \quad 2xy = 9z\,.$$

   Poišči dolžino krivulje K med točkama $(0, 0, 0)$ in $(3, 3, 2)$.

4. Krivulja K je podana parametično

$$\mathbf{r}(t) = (a\,\mathrm{ch}(t), a\,\mathrm{sh}(t), , a\,t)\,,\; a > 0, ; t \in \mathbb{R}\,.$$

   Poišči enačbo tangente na krivuljo K v točki $(\frac{5}{4}a, \frac{3}{4}a, a \ln 2)$.

5. Parametriziraj valj podan z

$$x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq\ 5\,,$$

ter poišči enačbo tangentne ravnine v točki $(1, \sqrt{3}, 3)$.

6. Poišči normalni vektor v poljubni točki ploskve, podane z enačbo

$$x^2 + 4x + y^2 = 0\,.$$

7. Ploskev P je podana s parametrizacijo

$$\mathbf{r}(u, v) = (u\ \cos v, u\ \sin v, u^2 + 1),\ u > 0,\ v \in [0, 2\pi)\,.$$

   (a) Skiciraj ploskev P.

   (b) Poišči enačbo normale v točki $(0, 2, 5)$.

   (c) Poišči vse točke na ploskvi P, v katerih gre tangentna ravnina skozi koordinatno izhodišče.

Laplaceova transformacija in njena uporaba

2.1 Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija ima v inženirski matematiki veliko uporabno vrednost, saj problem reševanja diferencialnih enačb prevede na reševanje algrebrajskih enačb. Posebej uporabna je za reševanje težkih problemov v zvezi z diferencialnimi enačbami, za katere ne obstajajo analitične metode reševanja. Naš cilj je s pomočjo Laplaceove transformacije znati rešiti sistem diferencialnih enačb in prevesti parcialne diferencialne enačbe na navadne diferencialne enačbe.

Definicija 2.1 *Naj bo $f(t)$ dana funkcija, definirana za $t > 0$. Če obstaja integral*

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-z\,t} f(t)\,dt\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

tedaj je $F(z)$ Laplaceova transformiranka *funkcije $f(t)$.*

Transformiranko označimo tudi

$$F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z)\,.$$

Predpis

$$\mathcal{L}:\ f(t) \mapsto F(z)$$

je *Laplaceova transformacija.*

Originalno funkcijo $f(t)$ imenujemo *inverz Laplaceove transformiranke* ali krajše inverz od $F(z)$ in pišemo

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(z))\,.$$

Predpis

$$\mathcal{L}^{-1}:\ F(z) \mapsto f(t)$$

je *inverzna Laplaceova transformacija.*

Poudarimo, da funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, torej je realna funkcija realne spremenljivke, ki jo označujemo s t, saj se v praksi običajno nanaša na čas. Laplaceova transformiranka F je kompleksna funkcija kompleksne spremenljivke, saj $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Kaj sploh vemo o izrazu $e^{-z\,t}$, kjer je $z \in \mathbb{C}$ in $t \in \mathbb{R}$? Naj bo z kompleksno število $z = a + i\,b$. Tedaj je

$$\begin{aligned} e^{-z\,t} &= e^{-(a+i\,b)\,t} \\ &= e^{-a\,t}\,e^{-i\,b\,t} \\ &= e^{-a\,t}(\cos(b\,t) - i\,\sin(b\,t))\,. \end{aligned}$$

Poglejmo še njegovo absolutno vrednost

$$\begin{aligned} |e^{-z\,t}| &= |e^{-a\,t}\cos(b\,t) - i\,e^{-a\,t}\,\sin(b\,t)| \\ &= \sqrt{(e^{-a\,t}\cos(b\,t))^2 + (e^{-a\,t}\,\sin(b\,t))^2} \\ &= \sqrt{(e^{-a\,t})^2(\cos(b\,t))^2 + \sin(b\,t))^2)} \\ &= |e^{-a\,t}| \\ &= e^{-a\,t} > 0\,. \end{aligned}$$

Zgled 2.2 *Poišči Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = t$.*

Uporabimo metodo integracije po delih:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty e^{-z\,t}t\,dt \\ &= -\tfrac{1}{z}\tfrac{t}{e^{z\,t}}\,|_0^\infty + \tfrac{1}{z}\int_0^\infty e^{-z\,t}\,dt \\ &= 0 - \tfrac{1}{z^2}\tfrac{1}{e^{z\,t}}\,|_0^\infty \\ &= -\tfrac{1}{z^2}(0-1) \\ &= \tfrac{1}{z^2}\,. \end{aligned}$$

Definicija 2.3 *Funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je eksponentnega tipa, če obstajata konstanti $M > 0$ in c taki, da je*

$$|f(t)| \le M\,e^{c\,t}\,.$$

Tako sta na primer eksponentnega tipa obe hiperbolični funkciji, saj je

$$\operatorname{ch} t < e^t \quad \text{in} \quad \operatorname{sh} t < e^t \,.$$

Prav tako je eksponentnega tipa potenčna funkcija, saj je

$$t^n < n! e^t = n!(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots) \,.$$

Za funkcije eksponentnega tipa velja naslednji izrek.

Izrek 2.4 *Naj bo f (vsaj) odsekoma zvezna funkcija eksponentnega tipa. Tedaj Laplaceova transformiranka $F(z)$ funkcije f obstaja za vsa kompleksna števila z, za katera je $\mathbb{R}e(z) > c$.*

Dokaz. Naj bo $z = \alpha + i\,\beta$. Naredimo naslednjo oceno za Laplaceovo transformiranko:

$$\begin{aligned}
|F(z)| &= |\textstyle\int_0^\infty f(t)\, e^{-z\,t}\, dt| \leq \int_0^\infty |f(t)\, e^{-z\,t}|\, dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty |f(t)|\, |e^{-z\,t}|\, dt \leq \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\alpha\, t}\, dt \\
&\leq \textstyle\int_0^\infty M\, e^{c\,t}\, e^{-\alpha\, t}\, dt = M \int_0^\infty e^{(c-\alpha)\,t}\, dt \\
&= \frac{M}{c-\alpha}\, e^{(c-\alpha)\,t}|_0^\infty = \frac{M}{c-\alpha}(0-1) \\
&= \frac{M}{\alpha - c}\,, \quad \text{če je} \quad c - \alpha < 0\,.
\end{aligned}$$

Pokazali smo, da Laplaceova transformiranka obstaja, če je $\mathbb{R}e(z) = \alpha > c$. ∎

Zgled 2.5 *Poišči Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = e^{a\,t}$, $a \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
F(z) &= \textstyle\int_0^\infty e^{-z\,t}\, e^{a\,t}\, dt \\
&= \textstyle\int_0^\infty e^{(a-z)\,t}\, dt \\
&= \tfrac{1}{a-z} e^{(a-z)\,t}\; |_0^\infty \\
&= -\tfrac{1}{a-z}(0-1) \\
&= \tfrac{1}{z-a}\,.
\end{aligned}$$

Izrek pove, da če funkcija ne narašča prehitro, tedaj zanjo obstaja Laplaceova transformiranka za določena kompleksna števila. Obstajajo pa funkcije, ki ne zadoščajo pogojem Izreka 2.4, a vseeno lahko poiščemo njihove Laplaceove transformiranke. Zaradi tega je Izrek 2.4 zadostni pogoj za obstoj Laplaceove transformiranke, ne pa tudi potrebni pogoj. Primer funkcije, ki ne zadošča zadostnemu pogoju je funkcija $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, saj je $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} = \infty$. Izračunajmo njeno Laplaceovo transformiranko.

Zgled 2.6 *Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije*

$$f(z) = t^a\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Z vpejavo nove spremeljivke $u = z\,t \Rightarrow du = z\,dt$ izračunajmo integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^a\, e^{-z\,t}\, dt &= \int_0^\infty (\tfrac{u}{z})^a\, e^{-u}\, \tfrac{du}{z} \\ &= \tfrac{1}{z^{a+1}} \int_0^\infty u^a\, e^{-u}\, \tfrac{du}{z} \end{aligned}$$

Spomnimo se funkcije gama $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}\, e^{-u}\, du$, ki konvergira za $x > 0$. Tako je

$$\mathcal{L}(t^a)(z) = \frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}},\ a > -1\,.$$

Tako za $a = -\frac{1}{2}$ dobimo:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\,.$$

Za naravni eksponent $n \in \mathbb{N}$ pa je

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}} = \frac{n!}{z^{n+1}}\,.$$

Ena od pomebnih lastnosti Laplaceove transformacije je linearnost:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))(z) &= \int_0^\infty e^{-z\,t}(\lambda\, f(t) + \mu g(t))\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-z\,t}\lambda\, f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-z\,t}\mu g(t))\, dt \\ &= \lambda\, \int_0^\infty e^{-z\,t}\, f(t)\, dt + \mu\, \int_0^\infty e^{-z\,t}\, g(t))\, dt \\ &= \lambda\, \mathcal{L}(f(t))(z) + \mu\, \mathcal{L}(g(t))(z)\,. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem linearnosti Laplaceove transformacije brez težav izpeljemo Laplaceovo transformiranko obeh hiperboličnih funkcij $ch(\omega\, t)$ in $sh(\omega\, t)$, $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(ch(\omega\, t)(z) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{\omega\, t} + e^{-\omega\, t}}{2}\right)(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{z+\omega}\right)\,.$$

Tako je

$$\mathcal{L}(ch(\omega\, t)(z) = \frac{z}{z^2 - \omega^2}$$

in na podoben način izračunamo

$$\mathcal{L}(sh(\omega\, t)(z) = \frac{\omega}{z^2 - \omega^2}\,.$$

Zgled 2.7 *Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = \cos(\omega\, t)$.*

Izračunajmo Laplaceovo transformiranko

$$F(z) = \mathcal{L}(\cos(\omega\, t)) = \int_0^\infty \cos(\omega\, t)\, e^{-z\,t}\, dt$$

z integracijo po delih

$$\begin{aligned} u &= \cos(\omega\, t) & dv &= e^{-z\,t}\, dt \\ du &= -\omega\, \sin(\omega\, t)\, dt & v &= -\tfrac{1}{z}\, e^{-z\,t}\,. \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \cos(\omega\, t)\, e^{-z\,t}\, dt \;=\; -\tfrac{1}{z}\, e^{-z\,t}\, \cos(\omega\, t)|_0^\infty - \tfrac{\omega}{z}\int_0^\infty \sin(\omega\, t)\, e^{-z\,t}\, dt$$

Ponovno naredimo integracijo po delih

$$\begin{aligned} u &= \sin(\omega\, t) & dv &= e^{-z\,t}\, dt \\ du &= \omega\, \cos(\omega\, t)\, dt & v &= -\tfrac{1}{z}\, e^{-z\,t} \end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} F(z) &= -\tfrac{1}{z}(0 - \cos 0) - \tfrac{\omega}{z}\left(-\tfrac{1}{z}\, e^{-z\,t}\, \sin(\omega\, t)|_0^\infty + \tfrac{\omega}{z}\int_0^\infty \cos(\omega\, t)\, e^{-z\,t}\, dt\right) \\ F(z) &= \tfrac{1}{z} - \tfrac{\omega}{z}(0 + \tfrac{\omega}{z}\, F(z)) \\ F(z) &= \tfrac{1}{z} + \tfrac{\omega^2}{z^2}\, F(z)) \\ F(z) &= \frac{z}{z^2 + \omega^2}\,. \end{aligned}$$

Tako je

$$\mathcal{L}(\cos(\omega\, t)) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}\,.$$

Na podoben način lahko bralec sam za vajo izpelje

$$\mathcal{L}(\sin(\omega\, t)) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}\,.$$

Poleg linearnosti bomo potrebovali še naslednje lastnosti Laplaceove transformacije.

1. $\mathcal{L}(e^{a\,t}f(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z-a)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{a\,t}f(t))(z) &= \textstyle\int_0^\infty e^{a\,t}\, f(t)\, e^{-z\,t}\, dt\\ &= \textstyle\int_0^\infty f(t)\, e^{-(z-a)t}\, dt\\ &= \mathcal{L}(f(t))(z-a)\,.\end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}(f(a\,t))(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))(\frac{z}{a})\,,\ a>0$
   Vpeljimo novo spremenljivko $u = a\,t \Rightarrow du = a\,dt$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(a\,t))(z) &= \textstyle\int_0^\infty f(a\,t) e^{-z\,t}\, dt\\ &= \textstyle\int_0^\infty f(u) e^{-(\frac{z}{a})\,u}\, \frac{du}{a}\\ &= \tfrac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))\left(\tfrac{z}{a}\right)\,.\end{aligned}$$

3. Za $k>0$ naj bo

$$f(t-k) = \begin{cases} f(t-k) & ;\quad t \geq k\\ 0 & ;\quad 0 \leq t < k\,.\end{cases}$$

   $\mathcal{L}(f(t-k))(z) = e^{-z\,k}\mathcal{L}(f(t))(z)$

   Vpeljimo novo spremenljivko $u = t-k \Rightarrow du = dt$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-k))(z) &= \textstyle\int_0^\infty f(t-k) e^{-z\,t}\, dt\\ &= \textstyle\int_k^\infty f(t-k) e^{-z\,t}\, dt\\ &= \textstyle\int_0^\infty f(u) e^{-z\,(u+k)}\, du\\ &= e^{-z\,k}\textstyle\int_0^\infty f(u) e^{-z\,u}\, du\\ &= e^{-z\,k}\mathcal{L}(f(t))(z)\end{aligned}$$

4. Če je poljuben odvod funkcije f funkcija eksponentnega tipa, tedaj je

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n\mathcal{L}(f(t))(z) - z^{n-1}\,f(0) - z^{n-2}\,f'(0) - \ldots - z\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,.$$

Uporabimo integracijo po delih

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & e^{-z\,t} & \qquad & dv & = & f^{(n)}(t)\,dt \\ du & = & -z\,e^{-z\,t}\,dt & \qquad & v & = & f^{(n-1)}(t),\,. \end{array}$$

Z zaporedno uporabo dobljene formule lahko izpeljemo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) &= \textstyle\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-z\,t}\,dt \\
&= f^{(n-1)}(t)e^{z\,t}|_0^\infty + z\,\textstyle\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-z\,t}\,dt \\
&= -f^{(n-1)}(0) + z\,\mathcal{L}(f^{(n-1)}(t))(z) \\
&= -f^{(n-1)}(0) + z\,\big(-f^{(n-2)}(0) + z\,\mathcal{L}(f^{(n-2)}(t))(z)\big) \\
&= -f^{(n-1)}(0) - z\,f^{(n-2)}(0) + z\,\big(z\,-\,f^{(n-3)}(0) + z\,\mathcal{L}(f^{(n-3)}(t))(z)\big) \\
&= -f^{(n-1)}(0) - z\,f^{(n-2)}(0) - z^2\,f^{(n-3)} - \cdots - z^{n-3}\,f^{''}(0) + \\
&\quad z^{n-2}\,\big(-f'(0) + z\,\mathcal{L}(f^{'}(t))(z)\big) \\
&= -f^{(n-1)}(0) - z\,f^{(n-2)}(0) - z^2\,f^{(n-3)} - \cdots - z^{n-3}\,f^{''}(0) - \\
&\quad z^{n-2}\,f'(0) + z^{n-1}\,(-f(0) + z\mathcal{L}(f(t))(z)) \\
&= -f^{(n-1)}(0) - z\,f^{(n-2)}(0) - z^2\,f^{(n-3)} - \cdots - z^{n-3}\,f^{''}(0) - \\
&\quad z^{n-2}\,f'(0) - z^{n-1}\,f(0) + z^n\,\mathcal{L}(f(t))(z)\,.
\end{aligned}$$

Za $n = 1$ se formula glasi

$$\mathcal{L}(f^{'}(t))(z) = z\,\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0)\,.$$

5. $\mathcal{L}(t^n\,f(t))(z) = (-1)^n\mathcal{L}^{(n)}(f(t))(z) = (-1)^nF^{(n)}(z)\,,\ n \in \mathbb{N}$

Laplaceovo transformiranko odvajajmo po spremenljivki z do odvodov n-

tega reda:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^\infty f(t)\, e^{-z\,t}\, dt \\
F'(z) &= \int_0^\infty f(t)(-t)\, e^{-z\,t}\, dt \\
F''(z) &= \int_0^\infty f(t)t^2\, e^{-z\,t}\, dt \\
&\vdots \\
F^{(n)}(z) &= \int_0^\infty f(t)(-1)^n\, t^n\, e^{-z\,t}\, dt \\
&= (-1)^n \int_0^\infty (f(t)\, t^n)\, e^{-z\,t}\, dt \\
&= (-1)^n \mathcal{L}(t^n\, f(t))(z)\,.
\end{aligned}$$

6. Če je f odsekoma zvezna in eksponentnega tipa, tedaj je

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f(t)(z)\,.$$

Naj bo $\int_0^t f(\tau)\, d\tau = g(t)$. Ker lahko funkcijo g navzgor omejimo z

$$\begin{aligned}
|g(t)| &= \left|\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right| \leq \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \int_0^t M\, e^{c\,\tau}\, d\tau = \frac{M}{c}(e^{c\,t} - 1),\ c > 0\,,
\end{aligned}$$

je g funkcija eksponentnega tipa za katero vemo, da obstaja Laplaceova transformiranka. Zaradi zveznosti je $g' = f$ in z upoštevanjem lastnosti 4. dobimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g'(t))(z) &= z\,\mathcal{L}(g(t))(z) - g(0) \\
\mathcal{L}(f(t))(z) &= z\,\mathcal{L}(g(t))(z) - g(0) = z\,\mathcal{L}(g(t))(z) - 0\,.
\end{aligned}$$

Tako je

$$\mathcal{L}(g(t))(z) = \frac{1}{z}\,\mathcal{L}(f(t))(z)\,.$$

Zgled 2.8 *Uporabi izpeljane lastnosti pri izračunu Laplaceovih transformirank naslednjih funkcij:*

1. $f(t) = e^{a\,t}\cos(\omega\, t)$

Ker je $\mathcal{L}(e^{a\,t}f(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z-a)$, je

$$\mathcal{L}(e^{a\,t}\cos(\omega\, t))(z) = \mathcal{L}(\cos(\omega\, t))(z-a) = \frac{z-a}{(z-a)^2 + \omega^2}\,.$$

2. $f(t) = e^{a\,t}\sin(\omega\,t)$

$$\mathcal{L}(e^{a\,t}\sin(\omega\,t))(z) = \mathcal{L}(\sin(\omega\,t))(z-a) = \frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}\,.$$

3. $f(t) = e^{a\,t}ch(\omega\,t)$

$$\mathcal{L}(e^{a\,t}ch(\omega\,t))(z) = \mathcal{L}(ch(\omega\,t))(z-a) = \frac{z}{(z-a)^2-\omega^2}\,.$$

4. $f(t) = e^{a\,t}sh(\omega\,t)$

$$\mathcal{L}(e^{a\,t}sh(\omega\,t))(z) = \mathcal{L}(sh(\omega\,t))(z-a) = \frac{\omega}{(z-a)^2-\omega^2}\,.$$

5. $f(t) = \sin^2 t$

Upoštevamo, da je $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$ v formuli

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t))(z) &= z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0)\\
\mathcal{L}(\sin(2t))(z) &= z\,\mathcal{L}(\sin^2 t)(z) - \sin(0) = z\,\mathcal{L}(\sin^2 t)(z)\\
\mathcal{L}(\sin^2 t)(z) &= \tfrac{1}{z}\mathcal{L}(\sin(2t))(z) = \tfrac{1}{z}\tfrac{2}{z^2+4}\,.
\end{aligned}$$

Tabela 1: Osnovne Laplaceove transformiranke:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(z)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(z)$
1	$\frac{1}{z}$	e^{at}	$\frac{1}{z-a}$
t	$\frac{1}{z^2}$	$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{z^3}$	$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	$e^{at}\mathrm{ch}(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2-\omega^2}$
t^a, $a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$	$e^{at}\mathrm{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2-\omega^2}$

Tabela 2: Lastnosti Laplaceove transformacije:

$\mathcal{L}(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))(z) = \lambda\, \mathcal{L}(f(t))(z) + \mu\, \mathcal{L}(g(t))(z)$
$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z-a)$
$\mathcal{L}(f(at))(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))(\frac{z}{a})\, ,\, a > 0$
$\mathcal{L}(f(t-k))(z) = e^{-kz}\mathcal{L}(f(t))(z)$
$\mathcal{L}(f(t))(z)\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n\mathcal{L}(f(t))(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$\mathcal{L}(f'(t))(z) = z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0)$
$\mathcal{L}(t^n\, f(t))(z) = (-1)^n\, \mathcal{L}^{(n)}(f(t))(z)$
$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau)(z) = \dfrac{1}{z}\mathcal{L}(f(t))(z)$

Zgled 2.9 *Za dano Laplaceovo transformiranko* $\mathcal{L}(f(t))(z) = \frac{z+5}{z^2+2z+5}$ *poišči njen inverz* $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{z+5}{z^2+2z+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{z+5}{(z+1)^2+4}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{z+1}{(z+1)^2+4}\right) + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{2}{(z+1)^2+4}\right) \\ &= e^{-t}\,\cos(2t) + 2\,e^{-t}\,\sin(2t) \\ &= e^{-t}(\cos(2t) + 2\,\sin(2t)) \end{aligned}$$

Zgled 2.10 *Za dano Laplaceovo transformiranko* $\mathcal{L}(f(t))(z) = \frac{z+2}{z^2-4z-5}$ *poišči njen inverz* $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{z-2}{z^2-4z-5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{(z-2)+4}{(z-2)^2-9}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{z-2}{(z-2)^2-9}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{4}{(z-2)^2-9}\right) \\ &= e^{2t}\,\mathrm{ch}(3t) + \tfrac{4}{3}e^{2t}\,\mathrm{sh}(3t) \\ &= \tfrac{7}{6}e^{5t} - \tfrac{1}{6}e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Drugi možni način reševanja je s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

$$\frac{z+2}{(z-5)(z+1)} = \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z+1}\,.$$

Rešitev sistema enačb je $A = \frac{7}{6}$ in $B = -\frac{1}{6}$. Tako je

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{z-2}{z^2-4z-5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{7}{6}\tfrac{1}{z-5}\right) - L^{-1}\left(\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{z+1}\right) \\ &= \tfrac{7}{6}e^{5t} - \tfrac{1}{6}e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Zelo uporabna pri iskanju Laplaceovih transformirank je operacija konvolucije dveh funkcij. Naj bo

$$F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z) \quad \text{in} \quad G(z) = \mathcal{L}(g(t))(z)\,.$$

Iščemo funkcijo h, katere Laplaceova transformiranka je enaka produktu $F(z)G(z)$.

Definicija 2.11 *Naj bosta f, g zvezni funkciji. Tedaj je* konvolucija *funkcij f in g, $f * g$, enaka*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Uporabo konvolucije podaja naslednji izrek, katerega dokaz bomo izpustili, saj sega na področje večkratnih integralov.

Izrek 2.12

$$\mathcal{L}((f * g)(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z)\mathcal{L}(g(t))(z)\,.$$

Zgled 2.13 *Poišči inverz Laplaceove transformiranke, če je*

$$\mathcal{L}(h(t))(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}\,.$$

$$F(z) = \frac{1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\tfrac{1}{z-1}) = e^t$$

$$G(z) = \frac{1}{z+2} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}(\tfrac{1}{z+2}) = e^{-2t}$$

Po Izreku 2.12 velja

$$(f * g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(z)G(z)\right)\,.$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{(z-1)(z+2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(F(z)G(z)\right) \\
&= (f * g)(t) \\
&= \textstyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\
&= \textstyle\int_0^t e^{\tau}\, e^{-2(t-\tau)}\,d\tau \\
&= e^{-2\,t} \textstyle\int_0^t e^{3\,\tau}\,d\tau \\
&= \tfrac{e^{-2t}}{3}\, e^{3\,\tau}\big|_0^t \\
&= \frac{e^{t}-e^{-2t}}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Nalogo bi seveda lahko rešili tudi s pomočjo razcepa na parcialne ulomke.

2.2 Navadne diferencialne enačbe

Laplaceovo transformacijo lahko uporabimo pri reševanju različnih vrst navadnih diferencialnih enačb, kot tudi njihovih sistemov. Metoda je bolj ali manj uporabna, odvisno od danega problema. Poglejmo si posamezne primere.

2.2.1 Linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Najprej se omejimo na navadne diferencialne enačbe prvega reda s konstantimi koeficienti. Te sicer že znamo reševati, a poglejmo še kako jih lahko rešimo s pomočjo Laplaceove transformacije.

Za Laplaceovo transformiranko n-tega odvoda funkcije f moramo poznati $f(0)$ in vrednost v točki $T = 0$ vseh prvih $n-1$ odvodov. To pomeni, da ne moremo najti splošne rešitve take diferencialne enačbe, temveč le partiukularno rešitev pri danih začetnih pogojih. Poglejmo način reševanja diferencialne enačbe 2. reda. Naj bo za neznano funkcijo $x = x(t)$ dana diferencialna enačba

$$a_2\, x''(t) + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t) = q(t)$$

z začetnima pogojema $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$. Na celotno diferencialno enačbo delujemo z Laplaceovo transformacijo

$$\mathcal{L}(a_2\, x''(t) + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t))(z) = \mathcal{L}(q(t))(z)\,.$$

Zaradi linearnosti Laplaceove transformacijo dobimo

$$a_2\, \mathcal{L}(x''(t))(z) + a_1\, \mathcal{L}(x'(t))(z) + a_0\, \mathcal{L}(x(t))(z) = \mathcal{L}(q(t))(z)\,.$$

Vpeljemo oznaki

$$\mathcal{L}(x(t))(z) = X(z) \quad \text{in} \quad \mathcal{L}(q(t))(z))Q(z)\,.$$

Nadalje upoštevamo pravili

$$\mathcal{L}(x'(t))(z) = z\mathcal{L}(x(t))(z) - x(0) = zX(z) - c_1$$

in

$$\mathcal{L}(x''(t))(z) = z^2\mathcal{L}(x(t))(z) - z\,x(0) - x'(0) = z^2X(z) - z\,c_1 - c_2\,.$$

Tako dobimo

$$a_2\,(z^2X(z) - z\,c_1 - c_2) + a_1\,(zX(z) - c_1) + a_0\,X(z) = Q(z)\,,$$

ki je linearna enačba za neznako $X(z)$:

$$X(z) = \frac{Q(z) + a_1\,c_1 + z\,a_2\,c_1 + a_2\,c_2}{a_2\,z^2 + a_1\,z + a_0}\,.$$

Z uporabo inverzne Laplaceove transformacije dobimo rešitev diferencialne enačbe $x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(z))$.

Celotni postopek reševanja takih diferencialni enačb z Laplaceovo transformacijo je relativno zamuden, zato ni preveč smiseln.

Zgled 2.14 *S pomočjo Laplaceove transformacije reši diferencialno enačbo*

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = -2t - 1\,, \quad x(0) = 3,\, x'(0) = -4\,.$$

Na celotno diferencialno enačbo delujemo z Laplaceovo transformacijo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x(t))(z) &= X(z)\,,\\
\mathcal{L}(x'(t))(z) &= zX(z) - x(0) = zX(z) - 3\,,\\
\mathcal{L}(x''(t))(z) &= z^2X(z) - z\,x(0) - x'(0) = z^2X(z) - 3z + 4\,,\\
\mathcal{L}(-2t-1)(z) &= -2\tfrac{1}{z^2} - \tfrac{1}{z}\,.
\end{aligned}$$

S tem smo diferencialno enačbo prevedli na algebrajsko enačbo:

$$z^2X(z) - 3z + 4 + 3zX(z) - 9 + 2x(z) = -\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z}$$

oziroma

$$X(z) = \frac{3z^3 + 5z^2 - z - 2}{z^2(z^2 + 3z + 2)}\,.$$

Nastavek za razcep na parcialne ulomke je enak

$$X(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+2} + \frac{D}{z+1}$$

in izračunani koeficienti so

$$A = 1, B = -1, C = 1, D = 1\,.$$

Tako je inverzna Laplaceova transformiranka enaka

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}(X(z)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{z} - \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{z+2} + \tfrac{1}{z+1}\right) \\ x(t) &= 1 - t + e^{-2t} + e^{-t}\,. \end{aligned}$$

2.2.2 Linearne diferencialne enačbe

Linearna diferencialna enačba nima nujno konstantnih koeficientov. Za tak tip diferencialnih enačb nimamo analitične metode, ki bi rešila vsako tako enačbo. Reševanje takih diferencialnih enačb je težek problem, ena od možnosti je iskanje rešitve s pomočjo razvoja v potenčno vrsto.

Z uporaba Laplaceove transformacije imamo orodje, ki nam pomaga, a tudi v tem primeru postopek ni preprost. Poglejmo si uporabo na konkretnem primeru.

Zgled 2.15 *S pomočjo Laplaceove transformacije reši diferencialno enačbo*

$$t\,x''(t) + x'(t) + t\,x(t) = 0\,, \quad x(0) = 1,\, x'(0) = 0\,.$$

Na diferencialno enačbo delujemo z Laplaceovo transformacijo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t))(z) &= X(z)\,, \\ \mathcal{L}(x'(t))(z) &= zX(z) - x(0) = zX(z) - 1\,, \\ \mathcal{L}(x''(t))(z) &= z^2X(z) - z\,x(0) - x'(0) = z^2X(z) - z\,, \\ \mathcal{L}(t\,x(t))(z) &= (-1)^1\mathcal{L}'(x(t))(z) = -X'(z) \\ \mathcal{L}(t\,x''(t))(z) &= (-1)^1\mathcal{L}'(x''(t))(z) = -(z^2X(z) - z)' = -2zX(z) - z^2X'(z) + 1\,. \end{aligned}$$

S tem smo diferencialno enačbo drugega reda prevedli na diferencialno enačbo prvega reda:

$$-z^2X'(z) - 2zX(z) + 1 + zX(z) - 1 + X'(z) = 0$$

oziroma

$$X'(z) = -\frac{z}{z^2+1}X(z)\,,$$

ki je diferencialna enačba prvega reda z ločljivima spremenljivkama:

$$\begin{aligned}
\frac{dX(z)}{X(z)} &= -\frac{z}{z^2+1} \\
\ln X(z) &= -\tfrac{1}{2}\ln(z^2+1)+C \\
X(z) &= \frac{D}{\sqrt{z^2+1}}\,.
\end{aligned}$$

Ideja nadaljnega reševanja je, da funkcijo razvijemo v potenčno vrsto

$$X(z) = D\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2 2! z^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3! z^7} + \cdots\right)$$

ter členoma izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(D\left(\tfrac{1}{z} - \tfrac{1}{2z^3} + \tfrac{1\cdot 3}{2^2 2! z^5} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3! z^7} + \cdots\right)\right) \\
&= D\left(1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{t^2}{2!} + \tfrac{1\cdot 3}{2^2 2!}\tfrac{t^4}{4!} - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}\tfrac{t^6}{6!}\cdots\right) \\
&= D\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n n!(2n)!}t^{2n}\,.
\end{aligned}$$

Opazimo, da je rešitev ena od Besselovih funkcij.

2.2.3 Sistemi diferencialnih enačb

Spoznali bomo, kako lahko s pomočjo Laplaceoe transformacije rešujemo sisteme diferencialnih enačb. Na sistem linearnih diferencialnih enačb delujemo z Laplaceovo transformacijo, s čimer prevedemo problem na reševanje običajnih(algebrajskih) linearnih enačb, katerega neznanke so Laplaceove transformiranke. Ko le-te poiščemo, uporabimo na njih še inverzno Laplaceovo transformacijo.

Zgled 2.16 *S pomočjo Laplaceove transformacije reši sistem diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) &= -x(t) + y(t) - e^t \,, \end{aligned}$$

če je $x(0) = 1$ *in* $y(0) = 3$.

Poiščimo Laplaceovo transformiranko posameznih členov:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t))(z) &= X(z)\,, \\ \mathcal{L}(x'(t))(z) &= zX(z) - x(0) = zX(z) - 1\,, \\ \mathcal{L}(y(t))(z) &= Y(z)\,, \\ \mathcal{L}(y'(t))(z) &= zY(z) - y(0) = zY(z) - 3\,, \\ \mathcal{L}(e^t)(z) &= \tfrac{1}{z-1}\,. \end{aligned}$$

S tem smo sistem diferencialnih enačb prevedli na sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} zX(z) - 1 &= X(z) + Y(z) + \tfrac{1}{z-1} \\ zY(z) - 3 &= -X(z) + Y(z) - \tfrac{1}{z-1}\,. \end{aligned}$$

v katerem sta $X(z)$ in $Y(z)$ neznanki. Rešitev sistema je enolična in je enaka

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2 + 2z - 4}{(z-1)(z^2 - 2z + 2} \\ Y(z) &= \frac{3z^2 - 8z + 4}{(z-1)(z^2 - 2z + 2)}\,. \end{aligned}$$

Razcep na parcialne ulomke da rezultat

$$\begin{aligned} X(z) &= -\tfrac{1}{z-1} + \tfrac{2z+2}{z^2-2z+2} \\ Y(z) &= -\tfrac{1}{z-1} + \tfrac{4z-6}{z^2-2z+2}\,. \end{aligned}$$

Nazadnje izračunam še obe inverzni Laplaceovi transformiranki:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\tfrac{1}{z-1} + 2\tfrac{z-1}{(z-1)^2+1} + 4\tfrac{1}{(z-1)^2+1}\right) \\
&= -e^t + 2e^t\cos t + 4e^t\sin t \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\tfrac{1}{z-1} + 4\tfrac{z-1}{(z-1)^2+1} - 2\tfrac{1}{(z-1)^2+1}\right) \\
&= -e^t + 4e^t\cos t - 2e^t\sin t\,.
\end{aligned}$$

Zgled 2.17 *S pomočjo Laplaceove transformacije reši sistem diferencialnih enačb višjega reda*

$$\begin{aligned}
x'(t) + y'(t) &= t \\
x''(t) - y(t) &= e^{-t}\,,
\end{aligned}$$

če je $x(0) = 3$*,* $x'(0) = -2$ *in* $y(0) = 0$*.*

Postopamo enako kot v prejšnjem primeru in rešitev je

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2 + \tfrac{1}{2}(t^2 + e^{-t} + \cos t - 3\sin t) \\
y(t) &= 2 - \tfrac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - 3\sin t)\,.
\end{aligned}$$

2.3 Parcialne diferencialne enačbe

Parcialne diferencialne enačbe (krajše PDE) so diferencialne enačbe, v katerih se pojavljajo (parcialni) odvodi neznanih funkcij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Red* parcialne diferencialne enačbe je red najvišjega parcialnega odvoda v parcialni diferencialni enačbi. Neodvisne spremenljivke funkcij v parcialni diferencialni enačbi so običajno prostorske koordinate x, y, z in(ali) čas t. Za ilustracijo poglejmo nekaj primerov takih enačb, od katerih bomo kasneje nekatere tudi rešili.

1. Laplaceova enačba

   Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dvakratno zaporedno delovanje operatorja nabla ∇ na funkcijo f da:
   $$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla(\nabla f) \\ &= \nabla(f_x, f_y, f_z) \\ &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= \Delta f \,. \end{aligned}$$
   Operator
   $$\Delta = \nabla^2$$
   je *Laplaceov operator*, imenovan tudi *diferencialni operator*. Tedaj je
   $$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$
   parcialna diferencialna enačba drugega reda.

2. Valovanje (nihanje)
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad c \in \mathbb{R}^+ \,.$$

3. Prenos toplote
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad c \in \mathbb{R}^+ \,.$$

4. Tok stistljive tekočine
   $$\operatorname{div}(\rho\, v) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \,,$$
   kjer je $\rho = \rho(x, y, z, t)$ gostota tekočine, v hitrost stiskanja in t čas.

S pomočjo Laplacove transformacije smo reševanje nekaterih navadnih diferencialnih enačb in njihovih sistemov prevedli na reševanje algebrajskih enačb oziroma sistema linearnih enačb. Tudi nekatere (linearne) parcialne diferencialne enačbe funkcij dveh spremenljivk s konstantnimi koeficienti lahko rešujemo s pomočjo Laplaceove transformacije. Problem sicer ne prevedemo na algebrajsko enačbo, temveč na navadno diferencialno enačbo.

Dano parcialno diferencialno enačbo funkcije $f(x,t)$ prevedemo na navadno diferencialno enačbo tako, da poiščemo Laplaceovo transformiranko parcialnega odvoda funkcije f po eni od spremenljivk, naj bo to x:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)(z) &= \int_0^\infty \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, e^{-z\,t}\, dt \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f(x,t)\, e^{-z\,t}\, dt \\
&= \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(f(x,t))(z) \\
&= \\
&= \frac{\partial}{\partial x}F(x,z)\,.
\end{aligned}$$

Vidimo, da dobimo navadno diferencialno enačbo za transformiranko $F(x,z)$. Nazadnje uporabimo inverzno Laplaceovo transformacijo, s čimer dobimo rešitev prvotnega problema. Ilustrirajmo metodo na primeru nihanja polneskončne strune in prenosa toplote v eni dimenziji.

Zgled 2.18 Nihanje strune

Polneskončna struna (zelo dolga vrv ali struna) je vpeta v koordinatni sistem tako, da struna leži na pozitivnem delu osi x, s čimer je njena začetna točka v koordinatnem izhodišču. Začetno točko zanihamo, pri čemer se val širi vzdolž strune. Funkcija $u(x,t)$ za vsak trenutek t pove lego delca z absciso x in zadošča parcialni diferencialni enačbi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\; c > 0\,.$$

Na začetku struna miruje, zato sta začetna pogoja enaka

$$u(x,0) = 0 \quad in \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

Robna pogoja sta določena z gibanjem strune in sicer se naj začetni del giblje v skladu z neko funkcije $f(t) = u(0,t)$, neskončni del pa naj miruje, torej naj bo $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$.

Označimo Laplaceovo transformiranko funkcije u glede na spremenljivko t z $\mathcal{L}(u(x,t))(z) = U(x,z)$. Privzemimo, da lahko zamenjamo vrstni red odvajanja in integriranja, s čimer je

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) &= \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\, e^{-z\,t}\, dt \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u(x,t)\, e^{-z\,t}\, dt \\
&= \frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2}\,.
\end{aligned}$$

Izvedimo Laplaceovo transformacijo še na levi strani PDE:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right) &= z^2\,\mathcal{L}(u(x,t))(z) - z\,u(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \\
&= z^2\,\mathcal{L}(u(x,t))(z) \\
&= z^2\,U(x,z)\,.
\end{aligned}$$

Tako z delovanjem Laplaceove transformacije na PDE dobimo

$$\frac{z^2}{c^2}\,U(x,z) = \frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2}\,.$$

To je navadna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti (homogena) za neznano funkcijo $U(x,z)$ glede na spremenljivko x, z pa je parameter. Zapišimo jo kot

$$\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2} - \frac{z^2}{c^2}\,U(x,z) = 0$$

in rešimo:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - \tfrac{z^2}{c^2} &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= \pm\tfrac{z}{c} \\
U(x,z) &= C_1(z)\,e^{-\frac{z}{c}\,x} + C_2(z)\,e^{\frac{z}{c}\,x}
\end{aligned}$$

Pri iskanju koeficientov $C_1(z)$ in $C_2(z)$ moramo upoštevati, da je odmik $u(x,t)$ omejen, ko gre $x \to \infty$. Posledično zato obstaja njegova transformiranka $U(x,z)$, kar pomeni, da je $C_2(z) = 0$. Tako je

$$U(0,z) = C_1(z)\,.$$

Iz robnega pogoja $f(t) = u(0,t)$ in $\mathcal{L}(f(t))(z) = F(z)$ dobimo

$$F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z) = \mathcal{L}(u(0,t)(z) = U(0,z) \Rightarrow C_1(z) = U(0,z) = F(z)\,.$$

Tako je

$$U(x,z) = F(z)\, e^{-\frac{z}{c}\, x}\,.$$

Uporabimo pravilo o pomiku

$$U(x,z) = e^{-\frac{x}{c}\, z}\, \mathcal{L}(f(t))(z) = \mathcal{L}\left(f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)(z)\,,$$

kjer je

$$f\left(t-\frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f\left(t-\frac{x}{c}\right) & ; \quad t > \frac{x}{c} \\ 0 & ; \quad 0 \le t \le \frac{x}{c} \end{cases}$$

Inverzna Laplaceova transformiranka je tako

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)\,.$$

Zgled 2.19 Prenos toplote v eni dimenziji*(difuzijska enačba)*

Pri obravnavi tega problema se bomo omejili na prenos toplote samo v smeri x-osi. Prav tako predpostavimo idealno zunanjom izolacijo, kar pomeni da ni izmenjevanje toplote z okolico. Naj bo $u(x,t)$ temperatura palice na mestu x ob času t. Spremembo toplote podaja diferencialna enačba

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,.$$

Začetna temperatura palice naj bo enaka 0 stopinj, torej je začetni pogoj

$$u(x,0) = 0\,.$$

Nato začetek palice segrevamo s konstantno temperaturo T_0, zato je

$$u(0,t) = T_0\,.$$

Obenem naj bo temperatura na poljubnem mestu palice omejena, zato je

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) < \infty\,.$$

S tem smo določili oba robna pogoja.

Označimo Laplaceovo transformiranko funkcije u glede na spremenljivko t z $\mathcal{L}(u(x,t))(z) = U(x,z)$. Podobno kot v prejšnjem primeru je

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2}\,.$$

Izvedimo Laplaceovo transformacijo še na levi strani PDE:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = z\,\mathcal{L}(u(x,t))(z) - u(x,0) = z\,U(x,z)\,.$$

Z delovanjem Laplaceove transformacije na PDE tako dobimo

$$z\,U(x,z) = c^2\,\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2}\,,$$

ki je navadna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti (homogena) za neznano funkcijo $U(x,z)$ glede na spremenljivko x, z pa je parameter. Tako je

$$\frac{\partial^2 U(x,z)}{\partial x^2} - \frac{z}{c^2}\,U(x,z) = 0\,.$$

Rešitev je podobna kot pri nihanju, torej

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \tfrac{z}{c^2} &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\tfrac{\sqrt{z}}{c} \\ U(x,z) &= C_1(z)\,e^{-\frac{\sqrt{z}}{c}\,x} + C_2(z)\,e^{\frac{\sqrt{z}}{c}\,x} \end{aligned}$$

Pri iskanju koeficientov $C_1(z)$ in $C_2(z)$ moramo upoštevati, da je $\lim_{t\to\infty} u(x,t) < \infty$, zato obstaja transformiranka $U(x,z)$, kar pomeni, da je $C_2(z) = 0$. Tako je

$$U(0,z) = C_1(z)\,.$$

Iz robnega pogoja $u(0,t) = T_0$ in $\mathcal{L}(u(x,t)))(z) = U(x,z)$ dobimo

$$U(0,z) = \mathcal{L}(u(0,t))(z) = \mathcal{L}(T_0)(z) = T_0\frac{1}{z} \Rightarrow C_1(z) = \frac{T_0}{z}\,.$$

Tako je

$$U(x,z) = \frac{T_0}{z}e^{-\frac{x}{c}\sqrt{z}}\,.$$

Iskanje inverzne Laplaceove transformiranke je v tem primeru bolj zapleteno in sicer si pomagamo z rezultatom

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{z}}}{z}\right)(t) = \mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\,,$$

pri čemer je erf *funkcija napake*

$$\mathrm{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$$

in erfc njen komplement, $\mathrm{erfc}(w) = 1 - \mathrm{erfc}(w)$. Obe sta neelementarni funkciji. Tako je

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{T_0}{z}e^{-\frac{x}{c}\sqrt{z}}\right) = T_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) = T_0\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)\right)\,.$$

Zgled 2.20 *Poišči rešitev PDE*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ 0 < x < 2,\ t > 0$$

če je začetni pogoj določen z

$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x)$$

in sta robna pogoja enaka

$$u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0\,.$$

Postopamo kot v primeru difuzijske enačbe in iskana funkcija je

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3\sin(2\pi x)}{z+4\pi^2}\right) = 3\sin(2\pi x)e^{-4\pi^2 t}\,.$$

Linearna algebra

Linearna algebra najde svoj prostor pri kemikih in kemijskih tehnologih na različnih področjih. Na primer pri določanju tališč in vrelišč nekaterih organskih spojin, nadalje so lastne vrednosti tesno povezane s fizikalno kemijskimi lastnostmi prenekaterih molekul in nepogrešljive pri reševanju sistemov diferencialnih enačb, s katerimi opisujemo procese, in nazadnje ne moremo brez vektorskih prostorov v kvantni kemiji, kjer se preučuje struktura atomov.

3.1 Vektorski prostor

Definicija 3.1 *Naj bo $\mathcal{V}$ neprazna množica, na kateri je definirana binarna oparacija seštevanja in za komutativen obseg $\mathcal{O}$ naj bo definirana operacija množenja s skalarjem:*

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \ : \ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{V} \quad \ldots \quad \textit{seštevanje,}$$

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V},\, \forall\, \lambda \in \mathcal{O} \ : \ \lambda\, \mathbf{x} \in \mathcal{V} \quad \ldots \quad \textit{množenje s skalarjem.}$$

Če so izpolnjeni pogoji

(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,

(ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,

(iii) $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$,

(iv) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \exists {-\mathbf{x}} \in \mathcal{V} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(v) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathcal{O} : \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,

(vi) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathcal{O} : (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$,

(vii) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \forall \lambda, \mu \in \mathcal{O} : \lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\, \mu)\mathbf{x}$,

(viii) $\exists 1 \in \mathcal{O}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} : 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$,

tedaj je $\mathcal{V}$ vektorski prostor *nad obsegom O. Če je $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, je $\mathcal{V}$* realni vektorski prostor.

Opomnimo, da je operacija seštevanja binarna operacija iz $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, in operacija množenja s skalarjem je operacija iz $\mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Nas bodo v glavnem zanimali samo realni vektorski prostori.

Zgled 3.2 *Na množici* $\mathbb{R}^3$ *naj bosta definirani standardni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem:*

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad \ldots \quad \textit{seštevanje,}$$

$$\lambda\,(x_1, x_2, x_3) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \lambda\, x_3) \quad \ldots \quad \textit{množenje s skalarjem,}$$

pri čemer je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *in* $\lambda \in \mathcal{O}$. *Ali je* $\mathbb{R}^3$ *s tako definiranima operacijama vektorski prostor?*

Ni težko preveriti, da so izpolnjeni vsi zahtevani pogoji, kar naj bralec sam preveri.

Vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ iz Zgleda 3.2 je vsem znan trirazsežni realni vektorski prostor. Njegove elemente imenujemo geometrijski vektorji, saj jih lahko geometrijsko predstavimo v trirazsežnem koordinatnemu sistemu z usmerjenimi daljicami in jih običajno označujemo $\mathbf{x} = \vec{x}$. Veliko znanja o geometrijskih vektorjih smo pridobili v srednji šoli in se na tem mestu ne bomo posebej ukvarjali z njimi. Trirazsežen vektorski prostor lahko posplošimo v višje dimenzije, s čimer dobimo n-razsežen realni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$, kar si bomo pogledali na naslednjem Zgledu 3.3. V tem primeru so vektorji oz. elementi prostora $\mathbb{R}^n$ urejene n-terice.

Zgled 3.3 *Na množici* $\mathbb{R}^n$ *naj bosta definirani standardni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem:*

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&\quad \ldots \quad \textit{seštevanje,} \\
\lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n) \\
&\quad \ldots \quad \textit{množenje s skalarjem,}
\end{aligned}$$

pri čemer je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *in* $\lambda \in \mathcal{O}$. *Ali je* $\mathbb{R}^n$ *s tako definiranima operacijama vektorski prostor?*

Tudi v tem primeru ni težko preveriti, da so izpolnjeni vsi zahtevani pogoji, kar naj bralec sam preveri.

Zgled 3.4 *Na množici* $\mathbb{R}^3$ *naj bosta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem na sledeč način:*

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) && \ldots \textit{ seštevanje,} \\ \lambda\,(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, \lambda\, x_2, x_3) && \ldots \textit{ množenje s skalarjem,} \end{aligned}$$

pri čemer je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *in* $\lambda \in \mathcal{O}$. *Ali je* $\mathbb{R}^3$ *s tako definiranima operacijama vektorski prostor?*

Preverimo (vi.) točko iz definicije vektorskega prostora:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V},\ \forall \lambda, \mu \in \mathcal{O} :\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\,(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, (\lambda + \mu)\, x_2, x_3) = (x_1, \lambda\, x_2 + \mu\, x_2, x_3) \\ \lambda\,(x_1, x_2, x_3) + \mu(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, \lambda\, x_2, x_3) + (x_1, \mu\, x_2, x_3) = \\ &= (2\,x_1, (\lambda + \mu)x_2, 2\,x_3)\,. \end{aligned}$$

Posledično v tem primeru ne moremo govoriti o vektorskem prostoru.

Zgled 3.5 *Naj bo* $\mathcal{M}_{nm}$ *množica vseh matrike reda* $n \times m$ *in naj bosta na njej definirani običajni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem:*

$$\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{nm} \ :\ (A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \forall\, i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{nm}, \lambda\, \in \mathcal{O} \ :\ \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ali je $\mathcal{M}_{nm}$ *s tako definiranima operacijama vektorski prostor?*

Vse zahtevane pogoje smo že preverili, ko smo vpeljali obe operaciji na matrikah in zato je $\mathcal{M}_{nm}$ vektorski prostor.

Zgled 3.6 *Naj bo $\mathcal{F}[a,b]$ množica vseh funkcij definiranih na intervalu $[a,b]$ in naj bosta na njej definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem:*

$$\begin{array}{rcll} \forall\, f,g \in \mathcal{F}[a,b] & : & (f+g)(x) = f(x)+g(x) & \ldots\ \textit{seštevanje}\,, \\ \forall\, f \in \mathcal{F}[a,b],\, \forall c \in \mathbb{R} & : & (cf)(x) = c\,f(x) & \ldots\ \textit{množenje s skalarjem}\,. \end{array}$$

Ali je $\mathcal{F}[a,b]$ s tako definiranima operacijama vektorski prostor?

S funkcijami čisto običajno računamo, zato sta izpolnjeni obe lastnosti in $\mathcal{F}[a,b]$ je vektorski prostor.

Zgled 3.7 *Naj bo $\mathbb{R}_n[x]$ množica vseh polinomov stopnje kvečejmu n in naj bosta na njej definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem:*

$$\begin{array}{rcll} \forall\, f,g \in \mathbb{R}_n[x] & : & (f+g)(x) = f(x)+g(x) & \ldots\ \textit{seštevanje}\,, \\ \forall\, f \in \mathbb{R}_n[x],\, \forall c \in \mathbb{R} & : & (cf)(x) = c\,f(x) & \ldots\ \textit{množenje s skalarjem}\,. \end{array}$$

Ali je $\mathbb{R}_n[x]$ s tako definiranima operacijama vektorski prostor?

Podobno kot za funkcije je tudi v primeru polinomov preprosto preveriti zahtevane pogoje in zato je $\mathbb{R}_n[x]$ vektorski prostor.

Zgled 3.8 *Naj $\mathcal{V}$ vsebuje en sam element in sicer $\mathbf{0}$. Ali je $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$ vektorski prostor?*

Trivialno je preveriti vse pogoje v primeru prostora $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$, ki ga imenujemo *ničelni vektorski prostor.*

Definicija 3.9 *Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor in naj bo $\mathcal{W}$ podmnožica od $\mathcal{V}$. Če je $\mathcal{W}$ tudi sam vektorski prostor, ga imenujemo* vektorski podprostor *od $\mathcal{V}$.*

Če želimo pokazati, da je nek vektorski prostor podprostor drugega prostora, ni potrebno preverjati vseh lastnosti, temveč samo zaprtost za množenje s skalarjem in seštevanje vektorjev.

Zgled 3.10 *Preveri, ali sta dani množici vektorska podprostora.*

1. *Naj bo $\mathcal{W}$ množica vseh točk oblike $(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ali je $\mathcal{W}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$?*

Preveriti moramo zaprtost za seštevanje in množenje s skalarjem. Naj bosta $\mathbf{x} = (\mathbf{0}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3})$ in $\mathbf{y} = (\mathbf{0}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3})$ poljubna elementa iz množice $\mathcal{W}$. Tedaj je njuna vsota

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{0}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) + (\mathbf{0}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}) = (\mathbf{0}, \mathbf{x_2} + \mathbf{y_2}, \mathbf{x_3} + \mathbf{y_3})$$

prav tako element množice $\mathcal{W}$. Nadalje naj bo λ poljuben skalar. Tedaj je

$$\lambda\, \mathbf{x} = \lambda\, (\mathbf{0}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) = (\mathbf{0}, \lambda\, \mathbf{x_2}, \lambda\, \mathbf{x_3})$$

tudi v $\mathcal{W}$, ki je zato vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$.

2. *Naj bo $\mathcal{W}$ množica vseh točk oblike $(1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ali je $\mathcal{W}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$?*

Preveriti moramo podobno kot prej zaprtost za seštevanje in množenje s skalarjem. Naj bosta sedaj $\mathbf{x} = (\mathbf{1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3})$ in $\mathbf{y} = (\mathbf{1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3})$ poljubna elementa iz množice $\mathcal{W}$. Tedaj je njuna vsota

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}) = (\mathbf{2}, \mathbf{x_2} + \mathbf{y_2}, \mathbf{x_3} + \mathbf{y_3})$$

in očitno ni element množice $\mathcal{W}$, ki zato ni vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$.

3.2 Linearna lupina in linearna neodvisnost

Definicija 3.11 *Naj bo* $\mathbf{x}$ *element vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Vektor* $\mathbf{x}$ *je* linearna kombinacija *vektorjev $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_k}$, ki so prav tako elementi vektorskega prostora V, če obstajajo skalarji $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ takšni, da je*

$$\mathbf{x} = \lambda_1\, \mathbf{v_1} + \lambda_2\, \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_k\, \mathbf{v_k}\,.$$

Opomba. Pravimo tudi, da se $\mathbf{x}$ izraža kot linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_k}$.

Zgled 3.12 *Preverimo, ali so naslednji vektorji linearne kombinacije podanih vektorjev.*

1. *Ali vektor $(2, 4) \in \mathbb{R}^2$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $(2, 1)$ in $(0, 1)$?*

Preveriti moramo, če obstajata skalarja λ_1 in λ_2 takšna, da velja

$$(2, 4) = \lambda_1(2, 1) + \lambda_2(0, 1)\,.$$

Rešujemo sistem

$$\begin{aligned} 2 &= 2\,\lambda_1 \\ 4 &= \lambda_1 + \lambda_2\,, \end{aligned}$$

katerega rešitev je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$ in odgovor je da.

2. *Ali vektor* $(1, -4) \in \mathbb{R}^2$ *lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev* $(2, 10)$, $(-3, -15)$*?*

   V tem primeru iščemo skalarja λ_1 in λ_2, ki bi zadoščala zvezi

   $$(1, -4) = \lambda_1(2, 10) + \lambda_2(-3, 15)\,.$$

   Rešujemo sistem

   $$\begin{aligned} 1 &= 2\,\lambda_1 - 3\,\lambda_2 \\ -4 &= 10\,\lambda_1 - 15\,\lambda_2\,. \end{aligned}$$

   Pomnožimo prvo enačbo z -5 in ju seštejemo, kar da

   $$-9 = 0\,.$$

   To pomeni, da se vektor $(-1, 4)$ ne da izraziti kot linearna kombinacija podanih vektorjev.

3. *Ali vektor* $(5, 4, -2) \in \mathbb{R}^3$ *lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *in* $(0, 0, 1)$*?*

   Sedaj iščemo skalarje λ_1, λ_2 in λ_3, ki zadoščajo

   $$(5, 4, -2) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1)\,.$$

   V tem primeru je rešitev ustreznega sistema trivialna in sicer je $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$ in $\lambda_3 = -2$.

4. *Ali lahko matriko* A *zapišemo kot linearno kombinacijo matrik* B *in* C*, če je*

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Ne, ker je $(B)_{21} = (C)_{21} = 0$ in ne more biti nobena njuna linearna kombinacija neničelna (saj je $(A)_{21} = 3$).

5. *Ali je* $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ *linearna kombinacija vektorjev* $p_1(x) = 1 - x$ *in* $p_2(x) = x^3$*?* Ne, ker manjka kvadratni člen.

Definicija 3.13 *Naj bo* $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$ *množica vektorjev vektorskega prostora* $\mathcal{V}$ *in naj bo* $\mathcal{W}$ *množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz* S*. Tedaj je* $\mathcal{W}$ linearna lupina *vektorjev* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}$ *in jo označujemo*

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}(S)\,.$$

Zgled 3.14 *Poiščimo linearno lupino vektorjev* $(1,0,0)$ *in* $(0,1,0)$ *iz* $\mathbb{R}^3$.

V linearni lupini so vse možne linearne kombinacije omenjenih vektorjev. Naj bosta torej λ_1 in λ_2 poljubna skalarja. Tedaj je

$$\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) \quad = \quad (\lambda_1, \lambda_2, 0)\,,$$

kar pomeni, da so v linearni lupini vsi tisti vektorji iz $\mathbb{R}^3$, ki imajo na tretjem mestu ničlo.

Zgled 3.15 *Poiščimo linearno lupino vektorjev* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$*, če je*

$$\mathbf{v_1} = 1,\ \mathbf{v_2} = x,\ \mathbf{v_3} = x^3\,.$$

V linearni lupini so vse možne linearne kombinacije omenjenih vektorjev, ki so v tem primeru polinomi. Naj bodo torej a, b, c poljubni skalarji. Tedaj je

$$a\,\mathbf{v_1} + b\,\mathbf{v_2} + c\,\mathbf{v_3} = a + b\,x + c\,x^3$$

kar pomeni, da so v linearni lupini vsi polinomi tretje stopnje brez kvadratnega člena.

Naslednji izrek karakterizira linearno lupino.

Izrek 3.16 *Naj bo* $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$ *množica vektorjev vektorskega prostora* V *in naj bo* $W = \mathcal{L}(S)$ *linearna lupina vektorjev iz* S*. Tedaj je*

(i) $\mathcal{W}$ *je vektorski podprostor od* $\mathcal{V}$*,*

(ii) $\mathcal{W}$ *je najmanjši vektorski podprostor od* $\mathcal{V}$*, ki vsebuje vektorje iz* S*.*

Dokaz.

(i) Pokazati moramo, da je $\mathcal{W}$ zaprt za seštevanje in množenje s skalarjem. Naj bosta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ elementa iz $\mathcal{W}$. Ker je $\mathcal{W} = \mathcal{L}(S)$, lahko $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz S, torej obstajajo skalarji λ_i in μ_i taki, da je:

$$\mathbf{x} = \lambda_1\,\mathbf{v_1} + \lambda_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_k\,\mathbf{v_k} \quad \text{in}$$

$$\mathbf{y} = \mu_1\,\mathbf{v_1} + \mu_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + \mu_k\,\mathbf{v_k}\,.$$

Tedaj je njuna vsota

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\lambda_1 + \mu_1)\,\mathbf{v_1} + (\lambda_2 + \mu_2)\,\mathbf{v_2} + \cdots + (\lambda_k + \mu_k)\,\mathbf{v_k}$$

prav tako iz $\mathcal{W}$. Naj bo zdaj k poljuben skalar. Tedaj produkt s skalarjem

$$k\,\mathbf{x} = (k \cdot \lambda_1)\,\mathbf{v_1} + (k \cdot \lambda_2)\,\mathbf{v_2} + \cdots + (k \cdot \lambda_k)\,\mathbf{v_k}$$

tudi pripada $\mathcal{W}$.

(ii) V bistvu moramo pokazati, da če je $\mathcal{W}'$ poljuben vektorski podprostor od $\mathcal{V}$, ki vsebuje vektorje $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$, potem mora veljati $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}'$. Naj bo torej $\mathcal{W}'$ poljuben vektorski podprostor od $\mathcal{V}$, ki vsebuje vektorje $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$ in naj bo $\mathbf{x}$ poljuben element iz $\mathcal{W}$. Pokazati moramo, da $\mathbf{x}$ pripada $\mathcal{W}'$. Ker je $\mathcal{W}$ linearna lupina, obstajajo skalarji λ_i taki, da je

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \, \mathbf{v_1} + \lambda_2 \, \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_k \, \mathbf{v_k} \, .$$

Ker je $\mathcal{W}'$ vektorski podprostor je zaprt za množenje s skalarjem, zato vsi vektorji

$$\lambda_i \, \mathbf{v_i}, \; i = 1, 2, \ldots, k$$

tudi pripadajo prostoru $\mathcal{W}'$. Prav tako je $\mathcal{W}'$ zaprt za seštevanje vektorjev, zato je vsota

$$\lambda_1 \, \mathbf{v_1} + \lambda_2 \, \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_k \, \mathbf{v_k}$$

vektor, ki pripada prostoru $\mathcal{W}'$, s čimer smo dokaz zaključili.

∎

Naj bo $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$ množica vektorjev vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Poglejmo, kaj lahko povemo o rešitvah vektorske enačbe

$$\lambda_1 \, \mathbf{v_1} + \lambda_2 \, \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_k \, \mathbf{v_k} = \mathbf{0} \, , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \, .$$

Taki vektorski enačbi bomo rekli *ničelna linearna kombinacija.* Očitno so skalarji $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ rešitve ničelne linearne kombinacije. Tej rešitvi rečemo *trivialna rešitev* vektorske enačbe. Trivialna rešitev vedno obstaja. Včasih pa obstajajo tudi kake druge (neničelne rešitve), kar vidimo na Zgledu 3.17.

Zgled 3.17 *Poiščimo netrivialno rešitev ničelne linearne kombinacije*

$$\lambda_1 \, (-4, 1, 2) + \lambda_2 \, (1, 0, -1) + \lambda_3 (2, -1, 0) = (0, 0, 0) \, .$$

Rešimo vektorsko enačbo

$$\begin{aligned} (-4 \, \lambda_1, \lambda_1, 2 \, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, -\lambda_2) + (2 \, \lambda_3, -\lambda_3, 0) &= (0, 0, 0) \\ (-4 \, \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \, \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3, 2 \, \lambda_1 - \lambda_2) &= (0, 0, 0) \, . \end{aligned}$$

Dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -4 \, \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \, \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ 2 \, \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \, . \end{aligned}$$

Z Gaussovo eliminacijo rešimo sistem:

$$
\begin{aligned}
[A,0] &= \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Sistem ima enoparametrično rešitev oblike $\lambda_2 = 2\lambda_3$ in $\lambda_1 = \lambda_3$. Če vpeljemo parameter $\lambda_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tedaj je $\lambda_2 = 2t$ in $\lambda_1 = t$. To pomeni, da nimamo samo trivialne rešitve, ampak je rešitev tudi vsak vektor oblike

$$
\begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}\,.
$$

.

Definicija 3.18 *Množica $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$ vektorjev vektorskega prostora V je* linearno neodvisna, *če ima ničelna linearna kombinacija vektorjev iz S samo trivialno rešitev.*

Drugače povedano, množica vektorjev $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_k}\}$ je linearno neodvisna natanko tedaj, ko velja

$$
\lambda_1\,\mathbf{v_1} + \lambda_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_k\,\mathbf{v_k} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \lambda_i = 0, \forall\, i = 1, 2, ..., k\,.
$$

Zgled 3.19 *Preverimo linearno neodvisnost množic.*

1. *Ali je množica vektorjev $\{(3,1,2),(1,0,-1),(2,-1,0)\}$ linearno neodvisna.*

   Postopamo podobno kot v Zgledu 3.17, torej iščemo rešitve ničelne linearne kombinacije teh treh vektorjev. Če obstaja samo trivialna rešitev, tedaj so linearno neodvisni, sicer bodo linearno odvisni. Rešujemo vektorsko enačbo

$$
\lambda_1(3,1,2) + \lambda_2(1,0,-1) + \lambda_3(2,-1,0) \;=\; (0,0,0)\,.
$$

   Dobimo sistem linearnih enačb

$$
\begin{aligned}
3\,\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\
2\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo determinanto pripadajoče matrike koeficientov:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7\,.$$

Ker je determinanta različna od 0, ima homogeni sistem samo trivialno rešitev in je po Definiciji 3.18 množica S linearno neodvisna.

2. *Ali je množica vektorjev* $(-4,1,2)$, $(1,0,-1),(2,-1,0)$ *linearno neodvisna.*

   V Zgledu 3.17 smo videli, da ima ničelna linearna kombinacija teh treh vektorjev netrivialno rešitev, zato množica ni linearno neodvisna.

Zgled 3.20 *Ali sta matriki* $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{M}_2$ *linearno neodvisni, če je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru je ničelna linearna kombinacija enaka

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in da homogeni sistem enačb

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\,\lambda_2 &= 0 \\ 2\,\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 - 3\,\lambda_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Ta sistem ima samo trivialno rešitev, torej je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, kar pomeni, da sta matriki A in B linearno neodvisni.

Zgled 3.21 *Ali so polinomi*

$$\mathbf{p_1} = x - 3,\ \mathbf{p_2} = x^2 + 2x,\ \mathbf{p_3} = x^2 + 1$$

iz vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[x]$ *polinomov stopnje kvečjemu dva linearno neodvisni?*

Ničelna linearna kombinacija je v tem primeru enaka

$$\begin{aligned} \lambda_1\,(x-3) + \lambda_2\,(x^2+2x) + \lambda_3\,(x^2+1) &= 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \\ x^2(\lambda_2 + \lambda_3) + x(\lambda_1 + 2\,\lambda_2) + (-3\,\lambda_1 + \lambda_3) &= 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1\,. \end{aligned}$$

Z enačenjem istoležnih koeficientov dobimo homogeni sistem enačb. Determinanta pripadajoča matrike koeficientov je različna od nič, zato ima sistem samo trivialno rešitev in posledično so polinomi linearno neodvisni.

Na tem mestu lahko omenimo, da smo poseben primer linearne odvisnosti oziroma neodvisnosti že srečali pri navadnih diferencialnih enačbah drugega reda, kjer smo preverjali linearno neodvisnost rešitev linearnih diferencialnih enačb višjega reda.

Zdaj, ko poznamo pojem linearne neodvisnosti, lahko tudi rang matrike karakteriziramo kot maksimalno število linearno neodvisnih vrstic (pri tem gledamo na posamezno vrstico matrike kot na vektor). Pri Matematiki II smo rekli, da je rang matrike število neničelnih vrstic po končanem postopku Gaussove eliminacije. Ni težko videti, da so neničelne vrstice linearno neodvisne, saj noben par vrstic (vektorjev) nima ničel na enakih mestih.

Izrek 3.22 *Končna množica vektorjev, ki vsebuje ničelni vektor, je linearno odvisna.*

Dokaz. Naj bo $S = \{\mathbf{0}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$. Tedaj je

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

kar da netrivialno rešitev in zato so vektorji iz S linearno odvisni. ∎

3.3 Baza

Sedaj imamo dovolj orodij, da lahko definiramo bazo vektorskega prostora.

Definicija 3.23 *Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ množica vektorjev vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Množica $\mathcal{B}$ je* baza *vektorskega prostora natanko tedaj, ko velja:*

(i) $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ *in*

(ii) $\mathcal{B}$ *je linearno neodvisna množica.*

Elemente baze imenujemo bazni vektorji.

Zgled 3.24 *Preverimo, ali tvorijo vektorji množice S bazo vektorskega prostora $\mathcal{V}$.*

1. $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

   Najprej preverimo, ali lahko poljuben vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ izrazimo kot linearno kombinacijo teh treh vektorjev. To pomeni, da iščemo skalarje λ_i, $i = 1, 2, 3$ take, da je

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_1\,(1,0,0) + \lambda_2\,(1,0,0) + \lambda_3\,(1,0,0)\\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\,.\end{aligned}$$

Preveriti je treba linearno neodvisnost vektorjev iz S, kar pomeni, da lahko ima ničelna linearna kombinacija samo trivialno rešitev:

$$\lambda_1\,(1,0,0) + \lambda_2\,(0,1,0) + \lambda_3\,(0,0,1) \;=\; (0,0,0)\,.$$

Sledi, da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, zato je S baza.

2. $S = \{(1,0,...,0), (0,1,...,0), ..., (0,0,...,1)\}$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$.

Ta primer je posplošitev prejšnjega in se pokaže na analogen način. To bazo imenujemo *standardna baza* prostora $\mathbb{R}^n$.

3. $S = \{(0,1,1), (0,1,2), (2,0,-1)\}$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Najprej preverimo, ali lahko poljuben vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ izrazimo kot linearno kombinacijo teh treh vektorjev. To pomeni, da iščemo skalarje λ_i, $i = 1, 2, 3$ take, da je

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda_1\,(0,1,1) + \lambda_2\,(0,1,2) + \lambda_3\,(2,0,-1)\\ &= (0, \lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, 2\,\lambda_2) + (3\,\lambda_3, 0, -\lambda_3)\\ &= (2\,\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\,\lambda_2 - \lambda_3)\end{aligned}$$

Iščemo rešitev sistema enačb, ki se v matrični obliki glasi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\,.$$

Sistem ima enolično rešitev, če je determinanta matrike koeficientov različna od nič. Izračunajmo jo

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\,.\\ &= 2(2-1)\\ &= 2 \neq 0\,.\end{aligned}$$

To pomeni, da tvorijo vektorji linearno lupino.

Preverimo še drugi pogoj, to so rešitve ničelne linearne kombinacije:

$$\lambda_1\,(0,1,1)+\lambda_2\,(0,1,2)+\lambda_3\,(2,0,-1) \;=\; (0,0,0)\,.$$

Pripadajoči sistem zapisan v matrični obliki je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,.$$

Vemo že, da ima homogeni sistem trivialno rešitev natanko tedaj, ko je $\det(A)\neq 0$. Torej ima sistem samo trivialno rešitev, kar pomeni, da je množica S linearno neodvisna in je zato baza.

Vektorje

$$\begin{aligned} \mathbf{e_1} &= (1,0,...,0)\,,\\ \mathbf{e_2} &= (0,1,...,0)\,,\\ &\vdots\\ \mathbf{e_n} &= (0,0,...,1) \end{aligned}$$

imenujemo *standardni bazni vektorji* prostora $\mathbb{R}^n$.

Zgled 3.25 *1. Ali so polinomi*

$$\mathbf{p_0}=1,\ \mathbf{p_1}=x,\ \mathbf{p_2}=x^2,\ldots,\ \mathbf{p_n}=x^n$$

baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_n[x]$ polinomov stopnje kvečjemu n.

Za prvi pogoj je potrebno preveriti, da lahko poljuben polinom stopnje kvečjemu n izrazimo kot linarno kombinacijo polinomov $\mathbf{p_i}$, $i=0,1,\ldots,n$. To pomeni, da ostajajo skalarji λ_i, $i=0,1,\ldots,n$ taki, da je

$$\begin{aligned} a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_1\,x+a_0 &= \lambda_n\,\mathbf{p_n}+\lambda_{n-1}\,\mathbf{p_{n-1}}+\cdots+\lambda_0\,\mathbf{p_0}\\ &= \lambda_n\,x^n+\lambda_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+\lambda_0\,. \end{aligned}$$

Primerjava istoležnih koeficientov da rešitev $a_i=\lambda_i, \forall\, i=0,1,\ldots,n$. Preverimo še njihovo linearno neodvisnost. Ničelna linearna kombinacija je

$$\begin{aligned} 0\cdot x^n+0\cdot x^{n-1}+\cdots+0\cdot x+0\cdot 1 &= \lambda_n\,\mathbf{p_n}+\lambda_{n-1}\,\mathbf{p_{n-1}}+\cdots+\lambda_0\,\mathbf{p_0}\\ &= \lambda_n\,x^n+\lambda_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+\lambda_0\,. \end{aligned}$$

Primerjava koeficientov da samo trivialno rešitev, kar pomeni, da imamo opravka z bazo.

2. *Ali polinomi*

$$\mathbf{p_1} = x - 3,\ \mathbf{p_2} = x^2 + 2x,\ \mathbf{p_3} = x^2 + 1$$

   iz vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[x]$ *tvorijo bazo?*

   V Zgledu 3.21 smo videli, da so ti polinomi linearno neodvisni. Preveriti moramo ali tvorijo linearno lupino.

$$\begin{aligned} a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 &= \lambda_1\,(x-3) + \lambda_2\,(x^2+2x) + \lambda_3\,(x^2+1) \\ a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 &= x^2(\lambda_2 + \lambda_3) + x(\lambda_1 + 2\,\lambda_2) + (-3\,\lambda_1 + \lambda_3)\,. \end{aligned}$$

   Z enačenjem istoležnih koeficientov dobimo nehomogeni sistem enačb, ki mu pripada enaka matrika koeficientov kot v Zgledu 3.21. Ker je njena determinanta različna od nič, ima sistem enolično rešitev in zato tvorijo polinomi bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

Polinomi

$$\mathbf{p_0} = 1,\ \mathbf{p_1} = x,\ \mathbf{p_2} = x^2, \ldots,\ \mathbf{p_n} = x^n$$

tvorijo *standardno bazo* prostora $\mathbb{R}^n$ polinomov stopnje kvečjemu n.

Zgled 3.26 *Ali tvorijo matrike*

$$\mathbf{E}^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{E}^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{E}^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{E}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bazo prostora kvadratnih matrik $\mathcal{M}_2$ *reda dva?*

Poljubna matrika reda dva se da izraziti kot linearna kombicaja zgornjih matrik, saj je

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

natanko tedaj, ko je $a_{11} = \lambda_1$, $a_{12} = \lambda_2$, $a_{21} = \lambda_3$, $a_{22} = \lambda_4$. Prav tako ni težko preveriti, da ima ničelna linearna kombinacija samo trivialno rešitev in zato tvorijo bazo prostora $\mathcal{M}_2$.

Prostor iz Zgleda 3.26 lahko posplošimo na prostor matrik n-tega reda. Tako so matrike

$$(\mathbf{E}^{lk})_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = l \wedge j = k \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

standardna baza prostora matrik $\mathcal{M}_n$ reda n.

Izrek 3.27 *Če je množica vektorjev* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ *baza vektorskega prostora* $\mathcal{V}$*, tedaj lahko vsak vektor* $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ *na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz* $\mathcal{B}$*.*

Dokaz. Ker je $\mathcal{B}$ baza, lahko $\mathbf{x}$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$, to je, obstajajo skalarji $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ takšni, da je

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n} .$$

Predpostavimo nasprotno, torej da ta zapis ni enoličen. Potemtakem obstajo skalarji $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ takšni, da je

$$\mathbf{x} = \mu_1 \mathbf{v_1} + \mu_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \mu_n \mathbf{v_n} ,$$

pri čemer obstaja i tak, da je $\lambda_i \neq \mu_i$. Poglejmo si razliko

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x} &= \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n} - (\mu_1 \mathbf{v_1} + \mu_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \mu_n \mathbf{v_n}) \\ \mathbf{0} &= (\lambda_1 - \mu_1) \mathbf{v_1} + (\lambda_2 - \mu_2) \mathbf{v_2} + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) \mathbf{v_n} . \end{aligned}$$

Ker je množica $\mathcal{B}$ linearno neodvisna, je lahko ničelna samo trivialna linearna kombinacija, kar pomeni, da so vsi skalarji pred vektorji enaki nič:

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \lambda_2 - \mu_2 = 0, ..., \lambda_n - \mu_n = 0$$

oziroma

$$\lambda_i = \mu_i , \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n ,$$

kar pomeni, da smo prišli v protislovje, saj ne obstaja tak i, da je $\lambda_i \neq \mu_i$.

∎

Zgled 3.28 *Razvijmo vektor* $(-4, 7, 1) \in \mathbb{R}^3$ *po bazi iz Zgleda 3.24 točka 3.*

Poiskati moramo enolično določene skalarje λ_i, $i = 1, 2, 3$, ki rešijo vektorsko enačbo

$$(-4, 7, 1) = \lambda_1 (0, -1, 1) + \lambda_2 (0, 1, 2) + \lambda_3 (2, 0, -1)\} .$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -4 &= 2\,\lambda_3 \\ 7 &= -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 &= \lambda_1 + 2\,\lambda_2 - \lambda_3 , \end{aligned}$$

katere rešitev je

$$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2 .$$

Neposredno iz definicije linearne lupine in baze sledi naslednji izrek.

Izrek 3.29 *Če je* $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ *množica linearno neodvisnih vektorjev, tedaj je* S *baza vektorskega prostora* $\mathcal{L}(S)$.

Povejmo sedaj nekaj o razsežnosti oz. dimenziji vektorskih prostorov.

Izrek 3.30 *Naj bo* $\mathcal{V}$ *vektorski prostor in* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *njegova poljubna baza. Tedaj veljata naslednji trditvi.*

(i) Če neka množica vsebuje več kot n *vektorjev iz* $\mathcal{V}$*, tedaj je linearno odvisna.*

(ii) Če neka množica vsebuje manj kot n *vektorjev iz* $\mathcal{V}$*, tedaj njena linearna lupina ne more biti enaka* $\mathcal{V}$.

Dokaz.

(i) Naj bo $R = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$, $m > n$ množica poljubnih vektorjev iz $\mathcal{V}$. Pokazati moramo, da ničelna linearna kombinacija vektorjev iz R nima samo trivialne rešitve:

$$\lambda_1\,\mathbf{u_1} + \lambda_2\,\mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_m\,\mathbf{u_m} = \mathbf{0}\,.$$

Ker je $\mathcal{B}$ baza, lahko vsak vektor iz R razvijemo po bazi $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u_1} &= a_{11}\mathbf{v_1} + a_{21}\mathbf{v_2} + \cdots + a_{n1}\mathbf{v_n} \\
\mathbf{u_2} &= a_{12}\mathbf{v_1} + a_{22}\mathbf{v_2} + \cdots + a_{n2}\mathbf{v_n} \\
&\;\vdots \\
\mathbf{u_m} &= a_{1m}\mathbf{v_1} + a_{2m}\mathbf{v_2} + \cdots + a_{nm}\mathbf{v_n}\,.
\end{aligned}$$

Ta razvoj upoštevamo v ničelni linearni kombinaciji:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \lambda_1\,(a_{11}\mathbf{v_1} + a_{21}\mathbf{v_2} + \cdots + a_{n1}\mathbf{v_n}) + \lambda_2\,(a_{12}\mathbf{v_1} + a_{22}\mathbf{v_2} + \cdots + a_{n2}\mathbf{v_n}) + \cdots + \\
&\quad \lambda_m\,(a_{1m}\mathbf{v_1} + a_{2m}\mathbf{v_2} + \cdots + a_{nm}\mathbf{v_n}) \\
\mathbf{0} &= \mathbf{v_1}(\lambda_1\,a_{11} + \lambda_2\,a_{12} + \cdots + \lambda_m\,a_{1m}) + \mathbf{v_2}(\lambda_1\,a_{21} + \lambda_2\,a_{22} + \cdots + \lambda_m\,a_{2m}) + \cdots + \\
&\quad \mathbf{v_n}(\lambda_1\,a_{n1} + \lambda_2\,a_{n2} + \cdots + \lambda_m\,a_{nm})\,.
\end{aligned}$$

Ker so vektorji v_i iz $\mathcal{B}$ linearno neodvisni, ima njihova ničelna linearna kombinacija samo trivialno rešitev. Torej velja

$$\begin{aligned}
\lambda_1\,a_{11} + \lambda_2\,a_{12} + \cdots + \lambda_m\,a_{1m} &= 0 \\
\lambda_1\,a_{21} + \lambda_2\,a_{22} + \cdots + \lambda_m\,a_{2m} &= 0 \\
&\;\vdots \\
\lambda_1\,a_{n1} + \lambda_2\,a_{n2} + \cdots + \lambda_m\,a_{nm} &= 0\,.
\end{aligned}$$

To je homogeni sistem z m neznankami λ_i, v katerem je n enačb. Ker je enačb manj kot neznank, ima sistem večparametrično rešitev, kar pomeni, da R ni linearno neodvisna množica.

(ii) Naj bo podobno kot prej $R = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$, le da je sedaj $m < n$. Predpostavimo nasprotno, torej naj bo množica R linearna lupina vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Tedaj lahko vsak vektor iz $\mathcal{B}$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz R:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + \cdots + a_{m1}\mathbf{u_m} \\ \mathbf{v_2} &= a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} + \cdots + a_{m2}\mathbf{u_m} \\ &\vdots \\ \mathbf{v_n} &= a_{1n}\mathbf{u_1} + a_{2n}\mathbf{u_2} + \cdots + a_{mn}\mathbf{u_m} \,. \end{aligned}$$

Poglejmo si ničelno linearno kombinacijo vektorjev v_i:

$$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0} \,.$$

Vemo, ker so vektorji iz $\mathcal{B}$ linearno neodvisni, lahko ima ničelna linearna kombinacija samo trivialno rešitev. Podobno kot v prejšnji točki upoštevamo razvoj vektorjev v_i po množici R. Gledamo, ali ima ničelna linearna kombinacija vektorjev iz R kako netrivialno rešitev (poleg rešitve $\lambda_i = 0, \forall i$), kar nas pripelje do sistema enačb:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} &= 0 \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_n a_{2n} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_n a_{mn} &= 0 \,. \end{aligned}$$

Ponovno dobimi homogeni sistem, v katerem je manj enačb kot neznank, kar ima za posledico neskončno rešitev. S tem smo prišli v protislovje, da obstaja samo trivialna rešitev ničelne linearne kombinacije vektorjev iz $\mathcal{B}$.

∎

Posledica 3.31 *Če je $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ neka baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$, tedaj vsaka baza prostora $\mathcal{V}$ vsebuje n vektorjev.*

Definicija 3.32 *Naj bo $\mathcal{V}$ neničelni vektorski prostor in $\mathcal{B}$ njegova baza. Če $\mathcal{B}$ vsebuje končno število vektorjev, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$, tedaj je $\mathcal{V}$* končno razsežen *vektorski prostor, katerega* dimenzija, $\dim(\mathcal{V})$, *je enaka n. Če $\mathcal{V}$ ni končno razsežen, tedaj je $\mathcal{V}$* neskončno razsežen *vektorski prostor.*

Zgled 3.33 *Poglejmo dimenzije nekaterih pomembnejših vektorskih prostorov.*

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.
3. $\dim(\mathcal{M}_{nm}) = nm$.
4. Prostor funkcija na zaprtem intervalu $\mathcal{F}[a, b]$ in prostor zveznih funkcij na zaprtem intervalu $\mathcal{C}[a, b]$ sta neskončno razsežna vektorska prostora.
5. Razsežnost ničelnega vektorskega prostora je enaka 0.

Iz Izreka 3.30 sledi Posledica 3.34.

Posledica 3.34 *Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor dimenzije n in naj bo S množica vektorjev iz $\mathcal{V}$ moči n. S je baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$, če je ali $\mathcal{L}(\mathbf{S}) = \mathcal{V}$ ali pa je S linearno neodvisna množica.*

Dokaz. Naj bo najprej S linearno neodvisna množica moči n. Pokazati moramo, da je $\mathcal{L}(\mathbf{S}) = \mathcal{V}$. Predpostavimo nasprotno, naj torej obstaja vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, ki ni linearna kombinacija vektorjev iz S. Tedaj je $S' = S \cup \{\mathbf{x}\}$ linearno neodvisna množica moči $n + 1$, kar je v protisovju z Izrekom 3.30.

Pokažimo še drugi del posledice in naj bo $\mathcal{L}(\mathbf{S}) = \mathcal{V}$. Pokazati moramo, da je potemtakem S linearno neodvisna množica. Uporabimo indukcijo po n.

$n = 1$ V tem primeru ima S en sam element, naj bo to vektor $\mathbf{e}$. Če bi bila množica $S = \{\mathbf{e}\}$ linearno odvisna, bi obstajal neničelni skalar λ tak, da je $\lambda\mathbf{e} = 0$, od koder sledi da je $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ in $\mathcal{L}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dimenzija ničelnega vektorskega prostora je enaka nič, s čimer pridemo v protislovje s tem, da je $n = 1$.

$n - 1 \to n$ Naj bo $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{n-1}}\}$ in $S' = S \cup \{\mathbf{e_n}\}$, pri čemer je $\mathbf{e_n} \neq \mathbf{e_i}, i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Pokazati moramo, da če je linearna lupina množice S' enaka vektorskemu prostoru $\mathcal{V}$, tedaj je S' linearno neodvisna množica. Predpostavimo naprotno, naj bo torej $\mathcal{L}(\mathbf{S'}) = \mathcal{V}$ in S' linearno odvisna množica. Potem obstaja $\mathbf{e_i}$ iz S', ki se da izraziti kot linearna kombinacija preostalih vektorjev is S'. B.š.z.s. naj bo $i = n$:

$$\mathbf{e_n} = \lambda_1\mathbf{e_1} + \lambda_2\mathbf{e_2} + \cdots \lambda_{n-1}\mathbf{e_{n-1}},\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, n - 1\,.$$

Ker vektorji $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{n-1}}$ sestavljajo množico S in je vektor $\mathbf{e_n}$ njihova linearna kombinacija, je linearna lupina množice S enaka vektorskemu prostoru $\mathcal{V}$. S tem pridemo v protislovje, saj je moč množice S enaka $n - 1$, razsežnost vektorskega prostora $\mathcal{V}$ pa je n , kar pomeni $\mathcal{L}(\mathbf{S}) \neq \mathcal{V}$.

∎

Poglejmo še povezavo med razsežnostjo vektorskega prostora in njegovega podprostora.

Izrek 3.35 *Če je $\mathcal{W}$ vektorski podprostor končno razsežnega vektorskega prostora $\mathcal{V}$, tedaj je tudi $\mathcal{W}$ končno razsežen.*

Dokaz. Naj bo $\dim(\mathcal{V}) = n$. Predpostavimo nasprotno, recimo da $\mathcal{W}$ ni končno razsežen in naj bo $\mathcal{B}$ baza prostora $\mathcal{W}$. Potemtakem $\mathcal{B}$ ne vsebuje končnega števila vektorjev, je pa linearno neodvisna množica vekotrjev, ki morajo pripadati tudi $\mathcal{V}$. To pomeni, da imamo množico več kot n vektorjev iz $\mathcal{V}$, ki so linearno neodvisni, kar je v protislovju z Izrekom 3.30.

∎

Dejansko lahko povemo še več.

Izrek 3.36 *Naj bo $\mathcal{W}$ vektorski podprostor končno razsežnega vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Tedaj velja*

$$\dim(\mathcal{W}) \leq \dim(\mathcal{V})\,.$$

Če je $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V})$, *potem prostora $\mathcal{W}$ in $\mathcal{V}$ sovpadata.*

Dokaz. Izrek 3.35 pove, da mora biti $\mathcal{W}$ končno razsežen vektorski prostor in naj bo $S = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_k}\}$ njegova baza. Nadalje naj bo $\dim(\mathcal{V}) = n$. S je bodisi baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$ bodisi ni baza. Če je S baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$, tedaj je po Izreku 3.30 $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V}) = n = k$. Če po drugi strani S ni baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$, tedaj v primeru $k < n$ dodamo množici S toliko vektorjev iz $\mathcal{V}$, da dobimo bazo za $\mathcal{V}$. Očitno tedaj velja $\dim(\mathcal{W}) \leq \dim(\mathcal{V})$. Če pa bi bil $k > n$, tedaj bi imeli več kot n linearno neodvisnih vektorjev v $\mathcal{W}$ in posledično v $\mathcal{V}$, kar je v protislovju z $\dim(\mathcal{V}) = n$.

Pokažimo še drugi del izreka, naj bo torej $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V}) = n$. Ker je $\mathcal{W}$ podprostor od $\mathcal{V}$, mora vsak vektor iz $\mathcal{W}$ pripadati tudi $\mathcal{V}$. Pokažimo še obratno, naj bo $\mathbf{x}$ poljuben vektor iz $\mathcal{V}$. Pokazati moramo, da $\mathbf{x}$ pripada tudi $\mathcal{W}$. Naj bo S množica n linearno neodvisnih vektorjev v $\mathcal{W}$ in $\mathcal{V}$. Po Posledici 3.31 je S baza obeh prostorov. Vektor $\mathbf{x}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz S. Ker je S baza tudi za $\mathcal{W}$, potemtakem $\mathbf{x}$ pripada tudi $\mathcal{W}$. S tem smo pokazali, da je $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. ∎

Zankrat smo videli, da lahko poljuben vektor zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev. Običajno izberemo standardno bazo in pravimo, da smo poljuben vektor razvili po standardni bazi, ni pa to seveda edina možna izbira. Včasih standardna baza ne zadošča in je potrebno delati v kateri drugi bazi in namen tega razdelka je poiskati prehod iz ene baze v drugo.

Definicija 3.37 *Naj bo* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *baza vektorskega prostora* $\mathcal{V}$ *in* $\mathbf{x}$ *poljuben vektor iz* $\mathcal{V}$*, pri čemer je*

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n}\,.$$

Tedaj so skalarji $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ kooordinate *vektorja* $\mathbf{x}$ *glede na bazo* $\mathcal{B}$*. Nadalje,* $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ *je* koordinatni vektor *od* $\mathbf{x}$ *glede na* $\mathcal{B}$ *in je določen z*

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Spomnimo se, da so koordinate vektorja $\mathbf{x}$ enolično določene in zato je tudi koordinatni vektor enoličen. Včasih je ugodneje uporabljati matrični zapis vektorja, tako da je

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Zgled 3.38 *Poišči koordinatni vektor za* $\mathbf{x} = (10, 5, 0)$ *glede na dano bazo, če je*

a) $\mathcal{B}_1$ *standardna baza v* $\mathbb{R}^3$*,*

b) $\mathcal{B}_2 = \{(1, -1, 1), (0, 1, 2), (3, 0, -1)\}$.

Naj bo $\mathcal{V}$ n-razsežen vektorski prostor in naj bosta $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ in $\mathcal{C} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ njegovi bazi, kjer je $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$. Poljuben vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ lahko razvijemo po obeh bazah:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_1 \mathbf{e_1} + \lambda_2 \mathbf{e_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{e_n} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e_i} \\ &= \mu_1 \mathbf{v_1} + \mu_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \mu_n \mathbf{v_n} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{v_j}\,. \end{aligned}$$

Zanima nas, kako bi prešli iz ene baze v drugo. Recimo, da poznamo koordinatni vektor vektorja $\mathbf{x}$ v bazi $\mathcal{B}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, nas pa zanima, kako bi dobili $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Iščemo torej prehod iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$. V ta namen razvijmo vektorje iz stare baze $\mathcal{B}$ po vektorjih iz nove baze $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1} &= p_{11}\,\mathbf{v_1} + p_{21}\,\mathbf{v_2} + \cdots + p_{n1}\,\mathbf{v_n} \\
\mathbf{e_2} &= p_{12}\,\mathbf{v_1} + p_{22}\,\mathbf{v_2} + \cdots + p_{n2}\,\mathbf{v_n} \\
&\vdots \\
\mathbf{e_n} &= p_{1n}\,\mathbf{v_1} + p_{2n}\,\mathbf{v_2} + \cdots + p_{nn}\,\mathbf{v_n}
\end{aligned}$$

oziroma

$$\mathbf{e_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\,\mathbf{v_j},\,.$$

Potemtakem je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\mathbf{e_i} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ji}\,\mathbf{v_j}\right) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ji}\,\lambda_i\right)\,\mathbf{v_j} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (p_{ji}\,\lambda_i\,)\,\mathbf{v_j}
\end{aligned}$$

Z enačenjem istoležnih koeficientov dobimo pogoj

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\,\lambda_i,\ \forall\, j = 1,\ldots,n\,.$$

To je v bistvu sistem enačb, ki se v matrični obliki glasi:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Označimo matriko z elementi p_{ji} s $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Potemtakem so stolpci matrike $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ koordinatni vektorji baznih vektorjev stare baze $\mathcal{B}$ razvitih po vektorjih nove baze $\mathcal{C}$. Tako definirano matriko $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ imenujemo *matrika prehoda* iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$. Tako lahko zapišemo

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Podobno bi lahko naredili obraten prehod iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{B}$. Z nekaj premisleka pridemo do ugotovitve, da tedaj velja

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}^{-1}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

oziroma

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}\,,$$

kar je posledica dejstva, da je matrika prehoda regularna oz. obrnljiva matrika.

Zgled 3.39 *Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{B} = \{(1,-1),(5,2)\}$ v standardno bazo prostora $\mathbb{R}^2$ ter prav tako matriko prehoda iz standardne baze v bazo $\mathcal{B}$. Poišči $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$, če je $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (3,5)$.*

Iz definicije matrike prehoda in Zgleda 3.39 je razvidno, da komponente poljubnega vektorja $\mathbf{x}$ v standardni bazi dobimo tako, da ga pri dani bazi pomnožimo z matriko prehoda, katere stolpci so natanko vektorji začetne baze.

Matrika prehoda v standardno bazo je regularna matrika in njeni stolpci so linearno neodvisni, saj so bazni vektorji. Dejansko velja še več, a naslednje trditve ne bomo dokazovali.

Trditev 3.40 *Naj bo A kvadratna matrika reda n s stolpci $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, , \ldots, \mathbf{p_n}$ (pri tem gledamo na stolpce kot na elemente prostora $\mathbb{R}^n$). Matrika A je regularna natanko tedaj, ko so vektorji $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, , \ldots, \mathbf{p_n}$ linearno neodvisni.*

(*Opomba*. Podobena trditev velja tudi za vrstice matrike A.)

3.4 Evklidski prostori

V prostoru $\mathbb{R}^n$ smo spoznali skalarni produkt dveh urejenih n-teric. To idejo produkta lahko posplošimo na poljuben vektorski prostor.

Definicija 3.41 *Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorji iz $\mathcal{V}$, ter λ poljuben skalar iz $\mathcal{O}$.* Skalarni produkt *vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ je preslikava, ki vektorjema $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ priredi realno število $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, ki zadošča naslednjim pogojem:*

i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$... *komutativnost,*

ii) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$... *distributivnost,*

iii) $\langle \lambda\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda\, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$... *homogenost,*

iv) $\mathbf{u} \neq 0 \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$... *pozitivna definitnost.*

Omenimo, da bomo govorili samo o realnih skalarnih produktih kar pomeni, da je obseg $\mathcal{O} = \mathbb{R}$.

Definicija 3.42 *Vektorski prostor s skalalarnim produktom se imenuje* unitarni prostor. *Če je unitarni prostor končno razsežen, ga imenujemo* evklidski prostor.

Do sedaj poznamo skalarni produkt dveh urejenih n-teric iz $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

in bralec naj sam preveri, da nam do sedaj edini znani skalarni produkt zadošča vsem zahtevanim pogojem. Ta produkt bomo imenovali standardni skalarni produkt prostora $\mathbb{R}^n$.

Zgled 3.43 *Na prostoru zveznih funkcij na zaprtem intervalu* $\mathcal{C}[a, b]$ *definirajmo skalarni produkt funkcij* $\mathbf{f}$ *in* $\mathbf{g}$ *na sledeč način*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx\,.$$

Preverimo vse zahtevane pogoje.

i) $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = \int_a^b g(x)f(x)\, dx,$

ii) $\int_a^b (f(x) + g(x))h(x)\, dx = \int_a^b f(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)h(x)\, dx,$

iii) $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \int_a^b f(x)g(x)\, dx = \int_a^b (\lambda f(x))g(x)\, dx,$

iv) $\forall\, x \in [a, b] : f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(x)\, dx > 0.$

Poglejmo nekaj preprostih lastnosti skalarnega produkta.

Izrek 3.44 *Naj bo* $\mathcal{V}$ *unitarni prostor in* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *poljubni vektorji iz* $\mathcal{V}$*. Tedaj velja:*

i) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = 0.$

ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$

iii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle,$

iv) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$

v) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle,$

vi) $\lambda \in \mathbb{R} :\ \langle \mathbf{u}, \lambda\, \mathbf{v} \rangle = \lambda\, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$

Dokaz.

i)
$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle 0 \cdot \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0\, \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0\,.$$

ii) ($\Rightarrow$) V to smer implikacija sledi zaradi točke (iv) definicije skalarnega produkta.

($\Leftarrow$) Obratno pa implikacija sledi iz točke (i) tega izreka.

Preostale lastnosti so preproste in jih naj bralec sam preveri. ∎

Zdaj ko poznamo skalarni produkt, lahko definiramo še normo in metriko v unitarnem prostoru.

Definicija 3.45 *Naj bo $\mathcal{V}$ unitarni prostor in* **u** *njegov poljuben vektor. Tedaj je* norma *(ali* dolžina*) vektorja* $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\|u\|$, *definirana kot*

$$\|u\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\,.$$

Za poljubna vektorja **u** *in* **v** *vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je* metrika *(ali* razdalja*) med njima,* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, *definirana kot*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \ .$$

Zgled 3.46 *Izračunaj* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|u\|$, $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, *če je:*

a) $\mathbf{u} = (1, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (9, 1, 0)$ *in je* $\mathbb{R}^3$ *opremljen s standardnim skalarnim produktom,*

b) $\mathbf{u} = x$, $\mathbf{v} = x^2$ *in je prostor* $\mathcal{C}[0, 1]$ *opremljen s produktom iz Zgleda 3.43.*

a) $\langle (1, -1, 4), (9, 1, 0) \rangle = 8$

$||(1, -1, 4)|| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$

$d((1, -1, 4), (9, 1, 0)) = \sqrt{(1 - 9)^2 + (-1 - 1)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{84}.$

b) $\langle x, x^2 \rangle = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$

$||x|| = \sqrt{\int_0^1 x^2\, dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$d(x, x^2) = \sqrt{\int_0^1 (x - x^2)^2\, dx} = \frac{1}{30}.$

Definicija 3.47 *Če je (realni) vektorski prostor $\mathcal{V}$ opremljen z metriko d, ga imenujemo* metrični prostor $(\mathcal{V}, d)$.

3.5 Ortonormirana baza

V vektorskem prostoru s skalarnim produktom lahko poiščemo posebno bazo, ki jo imenujemo ortonormirana baza. V ta namen poglejmo najprej, kdaj so elementi vektorskega prostora pravokotni oz. ortogonalni.

Definicija 3.48 *Naj bosta* $\mathbf{v}$ *in* $\mathbf{v}$ *vektorja unitarnega prostora. Vektorja* $\mathbf{v}$ *in* $\mathbf{v}$ *sta* ortogonalna*, ko je*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \, .$$

Zgled 3.49 *Vektorju* $(-1, 2, 6)$ *poišči vsaj en neničelni ortogonalni vektor v* $\mathbb{R}^3$ *glede na evklidski produkt.*

Iščemo vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tak, da bo

$$\langle (-1, 2, 6), (v_1, v_2, v_3) \rangle = 0 \, .$$

Potemtakem mora veljati

$$-v_1 + 2v_2 + 6v_3 = 0 \, .$$

Ta enačba ima neskončno rešitev, za nas je dovolj ena sama netrivialna. Vidimo, da je

$$v_1 = 2v_2 + 6v_3$$

in če izberemo, na primer $v_2 = 1$ in $v_3 = 0$, dobimo $v_1 = 2$ in ortogonalni vektor je

$$\mathbf{v} = (2, 1, 0) \, .$$

Definicija 3.50 *Naj bo S množica vektorjev unitarnega prostora. Pravimo, da je S* ortogonalna množica*, če je poljuben par vektorjev iz S ortogonalen. Nadalje, pravimo da je S* ortonormirana množica*, če je S ortogonalna množica in je norma vsakega vektorja iz S enaka 1.*

Zgled 3.51 *Dana je množica vektorjev* $S = \{(2, 0, -1), (0, -1, 0), (2, 0, 4)\}$ *evklidskega prostora* $\mathbb{R}^3$*.*

a) Pokaži, da je S ortogonalna množica, ni pa ortonormirana.

b) Spremeni vektorje v S tako, da bodo novi vektorji tvorili ortonormirano množico.

a) Izračunamo vse tri pare sklarnih produktov in vidimo, da so vsi enaki 0. Ker pa dolžina (norma) vseh vektorjev ni enaka 1, tvorijo ti trije vektorji ortogonalno, ne pa tudi ortonormirane množico.

b) Če želimo, da bo množica tudi ortonormirana, morajo imeti njeni vektorji dolžino enako 1. To dosežemo z njihovim normiranjem, kar pomeni, da ustrezni vektor ohrani smer, dolžino pa ima enako 1:

$$||(2,0,1)|| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad (\tfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{5}})$$

$$||(0,-1,0)|| = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,-1,0)$$

$$||(2,0,4)|| = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad (\tfrac{1}{\sqrt{5}}, 0, \tfrac{2}{\sqrt{5}})\,.$$

Izrek 3.52 *Naj bo* $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *ortogonalna množica neničelnih vektorjev. Tedaj je* S *linearno neodvisna množica.*

Dokaz. Z nekaj premisleka opazimo da je neničelnost vektorjev iz S potrebni pogoj, saj je sicer množica S linearno odvisna množica (imamo netrivialno rešitev $0 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} + \cdots + 1 \cdot \mathbf{0} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$).

Če želimo pokazati, da je množica S linearno neodvisna, mora imeti enačba

$$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

samo trivialno rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Za poljuben vektor $\mathbf{v_i}$ izračunajmo skalarni produkt:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v_n}, \mathbf{v_i} \rangle &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{v_i} \rangle \\ \langle \lambda_1 \mathbf{v_1}, \mathbf{v_i} \rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{v_2}, \mathbf{v_i} \rangle + \cdots + \langle \lambda_n \mathbf{v_n}, \mathbf{v_i} \rangle &= 0 \\ \lambda_1 \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_i} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_i} \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \mathbf{v_n}, \mathbf{v_i} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Ker je $\langle \mathbf{v_j}, \mathbf{v_i} \rangle = 0$ za vsak $i \neq j$, mora biti

$$\lambda_i \langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} \rangle = 0\,.$$

Ker je $\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} \rangle > 0$, je zato $\lambda_i = 0$. Ker je bil $\mathbf{v_i}$ poljuben vektor, ima začetna enačba samo trivialno rešitev in S je zato linearno neodvisna množica.

∎

Definicija 3.53 *Naj bo* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *baza evklidskega prostora. Če je* $\mathcal{B}$ *ortogonalna množica, jo imenujemo* ortogonalna baza. *Nadalje, če je* $\mathcal{B}$ *ortonormirana množica, jo imenujemo* ortonormirana baza.

Izrek 3.54 *Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ ortogonalna baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$ in $\mathbf{u}$ poljuben vektor iz $\mathcal{V}$. Tedaj je*

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_1} \rangle}{\|\mathbf{v_1}\|^2}\,\mathbf{v_1} + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_2} \rangle}{\|\mathbf{v_2}\|^2}\,\mathbf{v_2} + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_n} \rangle}{\|\mathbf{v_n}\|^2}\,\mathbf{v_n}\,.$$

Nadalje, če je $\mathcal{B}$ ortonormirana baza, tedaj je

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v_1} \rangle\ \mathbf{v_1} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v_2} \rangle\ \mathbf{v_2} + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v_n} \rangle\ \mathbf{v_n}\,.$$

Dokaz. Za poljuben $\mathbf{u}$ lahko poiščemo skalarje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ take, da je

$$\mathbf{u} = \lambda_1\,\mathbf{v_1} + \lambda_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n\,\mathbf{v_n}\,.$$

V ta namen za poljuben $\mathbf{v_i}$ izračunajmo skalarni produkt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v_i} \rangle &= \langle \lambda_1\,\mathbf{v_1} + \lambda_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_n\,\mathbf{v_n}, \mathbf{v_i} \rangle \\ &= \lambda_1\ \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_i} \rangle + \lambda_2\ \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_i} \rangle + \cdots + \lambda_n\ \langle \mathbf{v_n}, \mathbf{v_i} \rangle \end{aligned}$$

Ker so vektorji ortogonalni in je $\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} \rangle > 0$, se enakost poenostavi v

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v_i} \rangle &= \lambda_i\ \langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} \rangle \\ \lambda_i &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_i} \rangle}{\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} \rangle} \\ \lambda_i &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_i} \rangle}{\|\mathbf{v_i}\|^2} \end{aligned}$$

Če je $\mathcal{B}$ ortonormirana baza, je norma vsakega vektorja enaka ena in drugi del izreka sledi neposredno iz prvega dela.

∎

Vsak evklidski prostor premore ortonormirano bazo. Postopek, ki poišče to bazo, se imenuje *Gram-Schmidtov ortogonalizacijski postopek.*

Naj bo $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ poljubna baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$. Pridružimo ji ortogonalno bazo $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ na sledeč način. Naj bo najprej

$$\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1}\,.$$

Nadalje postavimo

$$\mathbf{e_2} = \mathbf{v_2} + \lambda_1\,\mathbf{e_1}\,,$$

kjer naj bo λ_1 tak skalar, da je $\langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v_2} + \lambda_1\,\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \rangle &= 0 \\ \lambda_1 &= -\frac{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{e_1} \rangle}{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \rangle}\,. \end{aligned}$$

Tako je

$$\mathbf{e_2} \;=\; \mathbf{v_2} - \frac{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{e_1}\rangle}{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}\rangle}\, \mathbf{e_1}\,.$$

Omenimo še, da je $\mathbf{e_2} \neq 0$, saj bi v nasprotnem bila vektorja $\mathbf{e_1}$ in $\mathbf{e_2}$ linearno odvisna, kar je v prostislovju z definicijo baze.

Ponovimo podobno za vektor $\mathbf{e_3}$. Naj bo torej

$$\mathbf{e_3} \;=\; \mathbf{v_3} + \mu_1\, \mathbf{e_1} + \mu_2\, \mathbf{e_2}\,,$$

kjer naj bosta μ_1 in μ_2 taka skalarja, da bo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1}\rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{e_3}, \mathbf{e_2}\rangle &= 0\,. \end{aligned}$$

Podobno kot prej mora biti $\mathbf{e_3} \neq 0$, saj smo sicer v prostislovju z linearno neodvisnostjo. Izračunajmo oba iskana skalarja μ_1 in μ_2:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v_3} + \mu_1\, \mathbf{e_1} + \mu_2\, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}\rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{v_3} + \mu_1\, \mathbf{e_1} + \mu_2\, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_1}\rangle + \mu_1\, \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}\rangle + \mu_2\, \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}\rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_2}\rangle + \mu_1\, \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\rangle + \mu_2\, \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_1}\rangle + \mu_1\, \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}\rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_2}\rangle + \mu_2\, \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_1}\rangle}{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}\rangle} \\ \mu_2 &= -\frac{\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_2}\rangle}{\langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\rangle}\,. \end{aligned}$$

Tako je

$$\mathbf{e_3} \;=\; \mathbf{v_3} - \frac{\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_1}\rangle}{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}\rangle}\, \mathbf{e_1} - \frac{\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{e_2}\rangle}{\langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\rangle}\, \mathbf{e_2}\,,$$

Postopek nadaljujemo do

$$\mathbf{e_n} = \mathbf{v_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{v_n}, \mathbf{e_i}\rangle}{\langle \mathbf{e_i}, \mathbf{e_i}\rangle}\, \mathbf{e_i}\,.$$

Množica $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ je seveda ortogonalna in zato linearno neodvisna, kar pomeni, da je baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$. Če vsak vektor iz $\mathcal{B}_2$ normiramo, dobimo ortonormirano bazo.

Zgled 3.55 *Naj bo* $\mathcal{B} = \{(2,-1,0),(1,0,-1),(3,7,-1)\}$ *baza prostora* $\mathbb{R}^3$ *s standardnim skalarnim produktom. Skonstruiraj*

a) ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}^3$*,*

b) ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$*,*

3.6 Fourierova vrsta

Zaenkrat smo se ukvarjali samo z bazami končno razsežnih vektorskih prostorov in cilj tega razdelka je približati idejo baze neskončno razsežnega vektorskega prostora, saj poglobljena obravnava zahteva poznavanje funkcionalne analize t.j. veja analize, ki se ukvarja s kompleksnimi funkcijami.

Vektorski prostor, s katerim se bomo ukvarjali, naj bo vektorski prostor zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a, b]$, $\mathcal{C}[a, b]$. Če ga opremimo s skalarnim produktom

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx\,,$$

je to unitarni vektorski prostor.

Zaenkrat se bomo omejili na interval $[-\pi, \pi]$. Poglejmo naslednjo množico funkcij definiranih na tem intervalu

$$1, \cos x, \cos(2x), \cos(3x), \ldots, \sin x, \sin(2x), \sin(3x), \ldots$$

oziroma če gledamo na funkcije kot na elemente vektorskega prostora

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{cos(nx)}, \mathbf{sin(nx)} |\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Izračunajmo medsebojne skalarne produkte teh funkcij:

$\langle \mathbf{1}, \mathbf{cos(nx)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 2\frac{\sin(nx)}{n}|_0^{\pi} = 0$

$\langle \mathbf{1}, \mathbf{sin(nx)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = 0$

$\langle \mathbf{sin(nx)}, \mathbf{cos(mx)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx = 0$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{cos(nx)}, \mathbf{cos(mx)} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx \\
&= 2\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx \\
&= 2\begin{cases} \int_0^{\pi} \cos^2(nx)\, dx & ;\quad m = n \\ \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x))\, dx & ;\quad m \neq n \end{cases} \\
&= 2\begin{cases} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2nx))\, dx & ;\quad m = n \\ \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x))\, dx & ;\quad m \neq n \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x + \frac{\sin(2nx)}{2n})|_0^{\pi} & ;\quad m = n \\ \left(\frac{\sin((n+m)x)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right)|_0^{\pi} & ;\quad m \neq n \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi & ;\quad m = n \\ 0 & ;\quad m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

Na podoben način dobimo

$$\langle \mathbf{sin(nx)}, \mathbf{sin(mx)} \rangle = \begin{cases} \pi & ; \quad m = n \\ \\ 0 & ; \quad m \neq n \end{cases}$$

Vidimo, da je samo skalarni produkt funkcije same s seboj neničelen, v vseh ostalih (mešanih) primerih je skalrani produkt enak nič, kar pomeni da je množica funkcij $S = \{\mathbf{1}, \mathbf{cos(nx)}, \mathbf{sin(nx)} | \, n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalna množica in zato linearno neodvisna. Da bi bila množica S baza vektorskega prostora $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, bi se morala vsaka funkcija $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ dati zapisati kot linearna kombinacija elementov is S:

$$\mathbf{f} = a_0 \cdot \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{cos(nx)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathbf{sin(nx)}\,,$$

kar pomeni, da je f pravzaprav vsota funkcijske vrste

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,.$$

Nimamo dovolj matematičnih orodij, da bi lahko raziskovali konvergenco te vrste, zato privzemimo, da je vrsta konvergentna na $[-\pi, \pi]$ in določimo neznane koeficiente a_n in b_n tako, da f skalarno množimo po vrsti z elementi množice S. Pomnožino najprej f z vektorjem 1:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
&\langle a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \mathbf{1} \rangle = \\
&\quad \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)))\, dx = \\
&\quad 2a_0 \textstyle\int_0^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx \right) = \\
&\quad 2\pi a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_k 2 \frac{\sin(nx)}{n} |_0^{\pi} + 0 \right) = \\
&\quad 2\pi a_0\,.
\end{aligned}$$

Tako je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,.$$

Nadalje izračunajmo skalarni produkt z vektorjem $\mathbf{cos(mx)}$, kjer je m neko naravno število:

$\langle \mathbf{f}, \mathbf{cos(mx)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$

$\langle a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \mathbf{cos(mx)} \rangle =$

$\int_{-\pi}^{\pi}(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)))\cos(mx)\,dx =$

$2a_0 \int_0^{\pi} \cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx\right)$

Od vseh zgornjih integralov je neničelni samo drugi v primeru, ko je $n = m$ in sicer je enak π, kar smo že izračunali, zato je

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{cos(mx)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \pi a_n$$

in

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx\,.$$

Na podoben način bi s skalarnim produktom funkcij $\mathbf{f}$ in $\mathbf{sin(mx)}$ dobili

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

S tem smo razvili funkcijo f v funkcijsko vrsto po kosinusih in sinusih in take vrste se imenujemo *trigonometrijske vrste*. Če so njeni koeficienti 4naki a_n in b_n, tedaj govorimo o Fourierovi vrsti.[1]

Definicija 3.56 *Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$. Vrsti*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer so koeficienti

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,,$$

pravimo Fourierova vrsta *funkcije f.*

Kot smo že omenili, ne znamo povedati veliko o konvergenci take vrste, zato bomo brez dokaza privzeli naslednji izrek.

[1] Imenujejo se po francoskem fiziku in matematiku Josephu Fourierju (1768 - 1830)

Izrek 3.57 *Če je periodična funkcija f odsekoma zvezna na $[-\pi, \pi]$ in ima v vsaki točki intervala levo in desno limito, je njena Fourierova vrsta konvergentna. Njena vsota je enaka $f(x)$ v vsaki točki, kjer je f zvezna. V točkah nezveznosti je vrednost vrste povprečna vrednost leve in desne limite.*

Zgled 3.58 *Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} -a & ; \quad -\pi < x \leq 0 \\ \\ a & ; \quad 0 <\leq \pi \end{cases} ,$$

če je $a > 0$ in je funkcija f periodična s periodo 2π.

Slika 3.1: Vir: Wikipedia.

Vidimo, da Fourierova vrsta omogoča razstavljanje poljubne periodične funkcije ali periodičnega signala v vsoto periodičnih funkcij sinus in kosinus.

Zaenkrat znamo razviti funkcijo zvezno na $[-\pi, \pi]$ v Fourierovo vrsto. Periodično funkcijo z osnovno periodo P lahko razvijemo v Fourierovo vrsto na poljubnem intervalu $[c, c+P]$ če le zadošča pogoju, da je na tem intervalu odsekoma zvezna. Na podoben način kot na intervalu $[-\pi, \pi]$ lahko določimo neznane koeficiente a_n in b_n. Naj bo $\omega = \frac{2\pi}{P}$, tedaj so koeficienti

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_c^{c+P} f(x)\, dx\,,$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_c^{c+P} f(x) \cos\left(n\omega x\right)\, dx\,,$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_c^{c+P} f(x) \sin\left(n\omega x\right)\, dx\,.$$

Zgled 3.59 *Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < x < 1 \\ \\ l & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ,$$

če je $k > 0$ *in je funkcija* f *periodična s periodo* $P = 4$.

Kadar je funkcija zvezna na intervalu $[0, P]$, jo lahko bodisi samo po kosinusih bodisi samo po sinusih v trigonometrijsko vrsto. Razvoj po kosinusih dosežemo tako, da jo razširimo na simetrični interval $[-P, P]$ tako, da je funkcija soda. V tem primeru govorimo o *kosinusni Fourierovi vrsti*. Kadar pa jo razširimo na način, ki naredi funkcijo liho, pa govorimo o *sinusni Fourierovi vrsti*. Poglejmo natančneje koeficiente pri posameznem razvoju:

kosinusna Fourierova vrsta :

Naj bo f soda funkcija s perido $2P$, $P > 0$. Tedaj so koeficienti razvoja sledeči:

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(x)\, dx\,,$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{P} \right) dx\,,$$

$$b_n = 0\,.$$

Kosinusna Fourierova vrsta je tako enaka

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) \\ &= \tfrac{1}{P} \int_0^P f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right) dx \right) \cos(nx)\,. \end{aligned}$$

sinusna Fourierova vrsta :

Naj bo f liha funkcija s periodo $2P$, $P > 0$. Tedaj so koeficienti razvoja sledeči:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \left(\sin \frac{n\pi x}{P} \right) dx\,.$$

Sinusna Fourierova vrsta je torej

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{P} \displaystyle\int_0^P f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{P}\right) dx \right) \sin(nx)\,. \end{aligned}$$

Funkcijo f definirano na intervalu $[0, P]$ lahko tako razvijemo na tri načine. Ali v kosinusno Fourierovo vrsto kot sodo funkcijo na $[-P, P]$ s periodo $2P$ ali v sinusno Fourierovo vrsto kot liho funkcijo na $[-P, P]$ s periodo $2P$ ali pa jo ravijemo v Fourierovo vrsto s periodo P.

Zgled 3.60 *Funkcijo* $f(x) = x$ *definirano na intervalu* $[0, \pi]$ *razvij v Fourierovo vrsto na vse tri načine.*

3.7 Linearne preslikave

V tem razdelku nas bodo zanimale linearne preslikave, na katere bomo gledali kot na preslikave med dvema vektorskima prostoroma.

Definicija 3.61 *Naj bosta $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}'$ vektorska prostora. Preslikava $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ je* linearna preslikava*, če za vsak $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ iz $\mathcal{V}$ in skalar λ velja:*

i) aditivnost

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \textit{in}$$

ii) homogenost

$$f(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,f(\mathbf{x})\,.$$

Obe lastnosti hkrati zapišemo kot

$$f(\lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y}) = \lambda\,f(\mathbf{x}) + \mu\,f(\mathbf{y})$$

in ju z eno besedo imenujemo *linearnost*. Če vektorska prostora sovpadata, se linearna preslikava imenuje *endomorfizem*:

$$f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}\,.$$

Zgled 3.62 *Ali je preslikava $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ določena s predpisom*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_2, x_3)$$

linearna preslikava.

$$\begin{aligned} f(\lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y}) &= f(\lambda\,(x_1, x_2, x_3) + \mu\,(y_1, y_2, y_3)) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Zgled 3.63 *Ali je preslikava $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ določena s predpisom*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2, x_1 - x_3)$$

linearna preslikava.

Preveri aditivnost na primer za $(1,1,0)$ in $(1,2,1)$.

Zgled 3.64 *Naj bo $\mathcal{V}$ prostor vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ali je preslikava $f:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$, ki vsaki funkciji priredi njen odvod, linearna preslikava?*

Izračunajmo

$$\begin{aligned} f(\lambda\, g_1+\mu\, g_2) &= (\lambda\, g_1+\mu\, g_2)' \\ &= \lambda\, g_1'+\mu\, g_2' \\ &= \lambda\, f(g_1)+\mu\, f(g_2)\,. \end{aligned}$$

To pomeni, da je f linearna preslikava.

V primeru nam najbolj znanega vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$ lahko linearno preslikavo prikažemo z matriko in obratno. O tem govorita naslednja izreka.

Izrek 3.65 *Naj bo A matrika reda $m\times n$. Tedaj je preslikava $f_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ določena s predpisom*

$$f_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$$

linearna preslikava.

Dokaz. Preverimo obe lastnosti:

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\,(\mathbf{x})+A\,(\mathbf{y}) = f_A(\mathbf{x})+f_A(\mathbf{y}) \\ f_A(\lambda\,\mathbf{x}) &= A\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A\,(\mathbf{x}) = \lambda\,f_A(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$

∎

Izrek 3.66 *Naj bo $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Tedaj obstaja taka matrika A reda $m\times n$, da je*

$$f = f_A\,.$$

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$, kjer je $\mathbf{e_i}$ vektor, ki ima na i-tem mestu ena, sicer pa same ničle. Naj bo A matrika reda $m \times n$, katere i-ti stolpec je slika vektorja $\mathbf{e_i}$, to je $f(\mathbf{e_i})$:

$$A = \begin{bmatrix} \\ f(\mathbf{e_1}) & f(\mathbf{e_2}) & \cdots & f(\mathbf{e_n}) \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Naj bo sedaj $\mathbf{x}$ poljuben vektor iz $\mathbb{R}^n$. Razvijmo ga po bazi $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\,\mathbf{e_n}\,.$$

Pokažimo, da velja

$$f(\mathbf{x}) = f_A(\mathbf{x})\,.$$

V ta namen izračunajmo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\,\mathbf{e_1} + x_2\,\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\,\mathbf{e_n}) \\ &= f(x_1\,\mathbf{e_1}) + f(x_2\,\mathbf{e_2}) + \cdots + f(x_n\,\mathbf{e_n}) \\ &= x_1\,f(\mathbf{e_1}) + x_2\,f(\mathbf{e_2}) + \cdots + x_n\,f(\mathbf{e_n}) \\ &= \begin{bmatrix} \\ f(\mathbf{e_1}) & f(\mathbf{e_2}) & \cdots & f(\mathbf{e_n}) \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= A\,\mathbf{x} \\ &= f_A(\mathbf{x})\,. \end{aligned}$$

■

Zgled 3.67 *Določi matriko, ki jo porodi linearna preslikava* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2)$.

Poiščemo slike standarnih baznih vektorjev glede na f:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zgled 3.68 *Določi matriko in predpis, ki jo porodi preslikava zrcaljenja čez os x v $\mathbb{R}^2$.*

Zrcaljenje f je preslikava iz $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Poljuben vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zrcaljenje preslika v vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tako velja

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 &&= 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \\ y_2 &= -x_2 &&= 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \,, \end{aligned}$$

kar je enako

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Tako je matrika zrcljenja čez os x enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zgled 3.69 *Določi matriko, ki jo porodi preslikava zrcaljenja čez premico $y = x$ v $\mathbb{R}^2$.*

Zrcaljenje f je preslikava iz $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Poljuben vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zrcaljenje preslika v vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = (x_2, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Tako velja

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 &&= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ y_2 &= x_1 &&= 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \,, \end{aligned}$$

kar je enako

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Tako je matrika zrcljenja čez premico $y = x$ enaka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

V nadaljevanju si bomo pogledali dva pomembna podprostora domene in kodomene linearne preslikave.

Definicija 3.70 *Naj bosta $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ in f linearna preslikava $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$. Tedaj je množica*

$$\mathcal{K}er\, f = \{\mathbf{x} \in \mathcal{V}; f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

jedro *("kernel") linearne preslikave in množica*

$$\mathcal{I}m\, f = \{\mathbf{y} \in \mathcal{V}'; \exists\, \mathbf{x} \in \mathcal{V} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

je slika *("image") linearne preslikave.*

Zgled 3.71 *Poišči jedro in sliko zrcaljenja čez premico $y = x$ v $\mathbb{R}^2$.*

Poglejmo nekaj lastnosti obeh množic.

Izrek 3.72 *Za poljubno linearno preslikavo $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ je $\mathcal{K}er\, f$ podprostor od $\mathcal{V}$ in $\mathcal{I}m\, f$ podprostor od $\mathcal{V}'$.*

Dokaz. Naj bosta $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ poljubna elementa iz jedra ter λ_1, λ_2 poljubna skalarja. Izračunajmo

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}) &= \lambda_1 f(\mathbf{x_1}) + \lambda_2 f(\mathbf{x_2}) \\ &= \lambda_1 \mathbf{0} + \lambda_2 \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Naj bosta zdaj $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}$ poljubna elementa slike linearne preslikave , skalarja pa taka kot prej. Potemtakem obstajata $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathcal{V}$ taka, da je

$$f(\mathbf{x_1}) = \mathbf{y_1} \quad \text{in} \quad f(\mathbf{x_2}) = \mathbf{y_2}\,.$$

Velja

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{y_1} + \lambda_2 \mathbf{y_2} &= \lambda_1 f(\mathbf{x_1}) + \lambda_2 f(\mathbf{x_2}) \\ &= f(\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2}) \in \mathcal{I}m\, f\,. \end{aligned}$$

∎

Izrek 3.73 *Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ a baza prostora $\mathcal{V}$ in f linearna preslikava $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$. Tedaj je*

$$\mathcal{I}m\, f = \mathcal{L}\left(\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \dots, f(\mathbf{e_n})\}\right)\,.$$

Dokaz. Naj bo $\mathbf{y} \in \mathcal{I}m\, f$. Tedaj obstaja $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ tak, da je

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mathbf{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 f(\mathbf{e_i})\,.$$

∎

Definicija 3.74 *Razsežnost slike linearne preslikave f je* rang *linearne preslikave, razsežnost jedra je njen* defekt.

Zgled 3.75 *Določi rang in defekt endomorfizma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki je določen s predpisom*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 5x_2 + 7x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2 + 5x_3)\,.$$

Izrek 3.76 *Naj bo $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ linearna preslikava. Tedaj je vsota ranga in defekta enaka razsežnosti prostora $\mathcal{V}$:*

$$dim\,(\mathcal{K}er\,f) + dim\,(\mathcal{I}m\,f) = dim\,(\mathcal{V})\,.$$

Dokaz. Naj bo dim$\mathcal{V} = n$ in naj bo $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$, $k \leq n$ baza jedra linearne preslikave. Dopolnimo jo do baze $\mathcal{B}$ celega prostora $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{w_{k+1}}, \ldots, \mathbf{w_n}\}\,.$$

Naj bo $\mathbf{x}$ poljuben vektor iz $\mathcal{V}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, w_i\,.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \mathbf{v_i}\right) + f\left(\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, \mathbf{w_i}\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(\mathbf{v_i}) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, f(\mathbf{w_i}) \\ &= \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, f(\mathbf{w_i})\,. \end{aligned}$$

Pokažimo, da je množica $\mathcal{B}' = \{f(\mathbf{w_{k+1}}), \ldots, f(\mathbf{w_n})\}$ baza vektorskega prostora $\mathcal{I}m\,f$.

i) Pokažimo linearno neodvisnost:

$$\lambda_{k+1} f(\mathbf{w_{k+1}}) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{w_n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0,\, \forall i = k+1, \ldots, n$$

$$f(\lambda_{k+1}\mathbf{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \mathbf{w_n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0,\, \forall i = k+1, \ldots, n$$

Vidimo, da je $\lambda_{k+1}\mathbf{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \mathbf{w_n}$ element jedra, zato ga razvijmo po njegovi bazi

$$\lambda_{k+1}\mathbf{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \mathbf{w_n} = \alpha_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_{k+1}\mathbf{v_{k+1}}$$

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_{k+1}\mathbf{v_{k+1}} - \lambda_{k+1}\mathbf{w_{k+1}} - \cdots - \lambda_n \mathbf{w_n} = 0\,.$$

Ker je $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}, \mathbf{w_{k+1}}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ baza, so vsi skalarji enaki 0.

ii) Pokažimo še, da je linearna lupina enaka celemu prostoru $\mathcal{I}m\,f$. Naj bo $\mathbf{y}$ poljuben element iz $\mathbf{I}m\,f$, tedaj obstaja $\mathbf{x}$ iz $\mathcal{V}$ tak, da je

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) &= f(\lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_{k+1}\mathbf{v_{k+1}} + \lambda_{k+1}\mathbf{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \mathbf{w_n}) \\ &= f(\lambda_1\, \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_k\, \mathbf{v_k}) + \lambda_{k+1}\, f(\mathbf{w_{k+1}}) + \cdots + \lambda_n\, f(\mathbf{w_n}) \\ &= \lambda_{k+1}\, f(\mathbf{w_{k+1}}) + \cdots + \lambda_n\, f(\mathbf{w_n})\,. \end{aligned}$$

■

3.8 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor in f endomorfizem tega prostora. V nadaljevanju nas bo zanimalo, katere neničelne vektorje $\mathbf{p}$ iz $\mathcal{V}$ linearna preslikava f preslika v neki večkratnik vektorja $\mathbf{p}$.

Definicija 3.77 *Naj bo f endomorfizem vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Skalar λ je* lastna vrednost *preslikave f, če obstaja neničelni vektor $\mathbf{p}$ iz $\mathcal{V}$ tak, da je*

$$f(\mathbf{p}) = \lambda\,\mathbf{p}\,.$$

Vektorju $\mathbf{p}$ pravimo lastni vektor *preslikave f, ki pripada lastni vrednosti λ.*

Na lastne vektorje lahko gledamo kot na tiste vektorje, ki jim delovanje preslikave ne spremeni smeri, temveč jih samo raztegne ali skrči. Na Sliki 3.2 vidimo dva vektorja, enega označenega z rdečo (vertikalna smer) in drugega z modro barvo (horizontalna smer). Pri raztegnjeni sliki Mone Lise na desni strani se vidi, da je rdeči vektor spremenil svojo smer, modri pa ne, zato je samo slednji tudi lastni vektor. Ker se je dolžina modrega vektorja pri raztegu ohranila, je večkratnik raztega t.j. pripadajoča lastna vrednost modrega vektorja enaka ena.

Slika 3.2: Vir: Wikipedia.

Zgled 3.78 *Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dana s predpisom $f(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$, kjer je D diagonalna matrika z elementi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ na diagonali. Pokaži, da so standarndni bazni vektorji v $\mathbb{R}^n$ lastni vektorji presliakave f. Poišči pripadajoče lastne vrednosti.*

Vektorju $\mathbf{e_i}$ pripada lastna vrednost d_i.

Zgled 3.79 *Naj bo $\mathcal{V}$ prostor vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in f linearna preslikava, ki funkciji g priredi njen odvod. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave f.*

Iščemo realne funkcije g, ki za nek λ zadoščajo zvezi

$$f(bfg) = \lambda bfg \Rightarrow g'(x) = \lambda g(x)\,.$$

Rešitev te diferencialne enačbe je družina funkcij

$$g(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}\,.$$

Funkcija $g(x) = e^{\lambda x}$ je lastni vektor preslikave f, ki pripada lastni vrednosti λ.

Zgled 3.80 *Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna preslikava, podana s predpisom*

$$f(x, y) = (2x + 4y, -x - y)\,.$$

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave f.

$$\begin{array}{rcl} (2x + 4y, x - y) & = & \lambda(x, y) \\ x(2 - \lambda) + 4y & = & 0 \\ x - y(1 + \lambda) & = 0 & \end{array}$$

Pripadajoči homogeni sistem linearnih enačb ima netrivialno rešitev samo za $\lambda = 3$ in $\lambda = -2$, ki sta lastni vrednosti, pripadajoči lastni vektorji so oblike $(4t, t)$ oz. $(t, -t)$ za vsak neničelni parameter t.

Izrek 3.81 *Naj bo $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linearna preslikava in λ njena lastna vrednost. Množica $\mathcal{V}_\lambda$ vseh vektorjev, za katere velja*

$$f(\mathbf{p}) = \lambda\,\mathbf{p}$$

je vektorski prostor, ki mu pravimo lastni prostor preslikave f. Lastni prostor $\mathcal{V}_\lambda$ vsebuje vse lastne vektorje, ki pripadajo lasti vrednosti λ in vektor $\mathbf{0}$.

Dokaz. Naj bosta $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_2}$ poljubna različna in neničelna lastna vektorja preslikave f, ki pripadata lastni vrednosti λ. Tedaj velja

$$f(\mathbf{p_1}) = \lambda\,\mathbf{p_1} \quad \text{in} \quad f(\mathbf{p_2}) = \lambda\,\mathbf{p_2}\,.$$

Nadalje je

$$f(\mu_1\,\mathbf{p_1} + \mu_2\,\mathbf{p_2}) = \mu_1\,f(\mathbf{p_1}) + \mu_2\,f(\mathbf{p_2})) = \lambda\,(\mu_1\,\mathbf{p_1} + \mu_2\,\mathbf{p_2})\,,$$

zato je $\mathcal{V}_\lambda$ vektorski prostor.
Ker za poljuben lastni vektor $\mathbf{p}$ iz $\mathcal{V}_\lambda$ velja

$$\mu_1 \cdot \mathbf{0} + \mu_2 \cdot \mathbf{p} = \mu_2 \cdot \mathbf{p} \in \mathcal{V}_\lambda\,,$$

tudi vektor $\mathbf{0}$ pripada lastnemu vektorskemu prostoru. ∎

Če sta $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_2}$ lastna vektorja, ki pripadata različnim lastnim vrednostim, tedaj njuna vsota $\mathbf{p_1}+\mathbf{p_2}$ ni lastni vektor. Velja celo več, o čemer govori naslednji izrek.

Izrek 3.82 *Lastni vektorji $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$ linearne preslikave $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so linearno neodvisni.*

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n. Naj bosta torej $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_2}$ lastna vektorja, ki pripadata različnima lastnima vrednostima λ_1 in λ_2. Predpostavimo nasprotno, recimo da sta lastna vektorja linearno odvisna. Tedaj obstajata netrivialna rešitev enačbe

$$\mu_1\,\mathbf{p_1} + \mu_2\,\mathbf{p_2} = \mathbf{0}\,.$$

Na obeh straneh enačbe uporabimo linearno preslikavo f

$$\begin{aligned} \mu_1\,f(\mathbf{p_1}) + \mu_2\,f(\mathbf{p_2}) &= f(\mathbf{0}) \\ \mu_1\,\lambda_1\,\mathbf{p_1} + \mu_2\,\lambda_2\,\mathbf{p_2} &= \mathbf{0} \\ \lambda_1\,\mu_1\,\mathbf{p_1} + \lambda_2\,\mu_2\,\mathbf{p_2} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $\mu_1\,\mathbf{p_1} = -\mu_2\,\mathbf{p_2}$, ter dobimo

$$\begin{aligned} -\lambda_1\,\mu_2\,\mathbf{p_2} + \lambda_2\,\mu_2\,\mathbf{p_2} &= \mathbf{0} \\ \mu_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,\mathbf{p_2} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ker je lastni vektor $\mathbf{p_2}$ po definiciji neničelni, mora veljati

$$\mu_2\,(\lambda_2 - \lambda_1) = 0\,.$$

Ker sta lastni vrednosti λ_1 in λ_2 različni, je zato $\mu_2 = 0$. Potemtakem pa je tudi $\mu_1 = 0$, s čimer pridemo v protislovje z netrivialno rešitvijo linearne kombinacije obeh lastnih vektorjev.

Indukcijski korak pokažemo na podoben način in so podrobnosti prepuščene bralcu.

∎

V nadaljevanju si poglejmo lastne vrednosti in lastne vektorje matrik. Iz Izreka 3.66 vemo, da za linearno preslikavo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja taka matrika A, da je

$$f(\mathbf{x}) = f_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x},,$$

zato je smiselna naslednja definicija.

Definicija 3.83 *Lastne vrednosti in lastni vektorji matrike A reda n so lastni vektorji endomorfizma f_A prostora $\mathbb{R}^n$.*

Potemtakem velja:

$$\begin{array}{rcccl} f_A(\mathbf{p}) & = & A\,\mathbf{p} & = & \lambda\,\mathbf{p} \\ & & (A - \lambda\,I)\mathbf{p} & = & \mathbf{0}\,. \end{array}$$

Dobimo homogoneni sistem enačb, katerega netrivialne rešitve so lastni vektorji $\mathbf{p}$ matrike A glede na lastno vrednost λ. Skupaj z vektorjem $\mathbf{0}$ tvorijo vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$, katerega dimenzija je enaka

$$n - \operatorname{rang}(A - \lambda\,I)$$

in ji pravimo *geometrična kratnost* lastne vrednosti λ. Nadalje že vemo, da je homogeni sistem netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je

$$\det(A - \lambda\,I) = 0\,.$$

Polinomu na levi strani pravimo *karakteristični polinom* in njegove ničle so lastne vrednosti matrike A.

Zgled 3.84 *Poišči lastni vrednosti in lastna vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{array} \right] = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)\,.$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_1 = -2$. Poiščimo še pripadajoča lastna vektorja. Najprej za $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3\,I)\mathbf{p} \;=\; 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

To pomeni, da morata p_1 in p_2 zadoščati pogoju

$$p_1 - 4\,p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 4p_2\,.$$

Označimo p_2 s parametrom t, torej naj bo $p_2 = t$. Pri tem parameter t poljubno izbiramo, torej je $t \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji so oblike

$$\begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Naravno je izbrati za t najpreprostejši primer, t.j. $t = 1$. Tedaj je prvi lastni vektor enak

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poglejmo še za $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{aligned} (A + 2\,I)\mathbf{p} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morata p_1 in p_2 zadoščati pogoju

$$p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2\,.$$

Vpeljemo parameter $p_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$ in izračunamo $p_1 = -t$. Torej je drugi lastni vektor

$$\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

oziroma za $t = 1$ dobimo drugi lastni vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ni težko preveriti, da sta oba lastna vektorja linearno neodvisna.

V obeh zgornjih primerih sta bili lastni vrednosti različna in enkratna korena karakterističnega polinoma. Takim lastnim vrednostim pravimo *enostavne lastne vrednosti*. Kadar se neki koren pojavi m-krat, pravimo, da je njegova *algebrajska kratnost* enaka m. V obeh primerih je geometrična kratnost enaka algebrajski in sicer sta obe enaki ena.

Zgled 3.85 *Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{matrix} 7-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{matrix} \right] = (\lambda - 5)^2 = 0\,.$$

Dvojna lastna vrednost matrike A je $\lambda_{1,2} = 5$. Poiščimo še lastne vektorje.

$$\begin{aligned} (A - 5\,I)\mathbf{p} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morata p_1 in p_2 zadoščati pogoju

$$2\,p_1 - p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 2\,p_1\,.$$

Označimo p_1 s parametrom t, torej naj bo $p_1 = t$, kjer je $t \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji so oblike

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Naravno je izbrati za t najpreprostejši primer, t.j. $t = 1$. Tedaj je lastni vektor enak

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo lastno vrednost, katere algebrajska kratnost je enaka dva, geometrična kratnost pa je ena.

Zgled 3.86 *Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{matrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix} \right] = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0\,.$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_{1,2} = -1$ in $\lambda_3 = 2$. Poiščimo še pripadajoče lastne vektorje. Najprej za $\lambda_{1,2} = -1$:

$$\begin{aligned} (A + I)\mathbf{p} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morajo p_1, p_2 in p_3 zadoščati pogoju

$$p_1 + p_2 + p_1 = 0 \Rightarrow p_3 = -p_1 - p_2 \,.$$

Naj bo $p_1 = t$ in $p_2 = s$, kjer sta $t, s \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji so oblike

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Vrednosti za t in s izberemo na najpreprostejši primer tako, da bosta dobljena vektorja linearno neodvisna in sicer $t = 1, s = 0$ in $t = 0, s = 1$. Pripadajoča lastna vektorja sta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \,,$$

ki sta seveda linearno neodvisna. Dobili smo lastno vrednost, katere algebrajska in geometrična kratnost je enaka 2.

Poglejmo še za $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{aligned} (A - 2\,I)\mathbf{p} &= 0 \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Rešitev pripadajočega sistema je

$$p_1 = p_2 = p_3 \,.$$

Naj bo $p_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tedaj je lastni vektor

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Za $t = 1$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Zgled 3.87 *Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike in pokaži, da so baza prostora* $\mathbb{R}^3$*:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{array}{ccc} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{array} \right] = (3-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0\,.$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Poiščimo še pripadajoče lastne vektorje. Najprej za $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3\,I)\mathbf{p} \;=\; 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev pripadajočega sistema je

$$p_1 = \frac{8}{7}\,p_3,\; p_2 = -\frac{4}{7}\,p_3\,.$$

Naj bo $p_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tedaj je lastni vektor

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{7}\,t \\ -\frac{4}{7}\,t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Primerno je izbrati $t = 7$ in dobimo

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Na podoben način dobimo še druga dva lastna vektorja in sicer sta

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ni težko videti, da so lastni vektorji linearno neodvisni, bralec pa naj sam preveri, da je njihova linearna lupina enaka $\mathbb{R}^3$*.*

Problem diagonalizacije matrike je v tesni povezavi z njenimi lastnimi vektorji. Za začetek poglejmo, kaj sploh je diagonalizabilna matrika.

Definicija 3.88 *Naj bo A kvadratna matrika reda n in naj obstaja obrnljiva matrika P reda n takšna, da je $P^{-1}AP$ diagonalna matrika. Tedaj pravimo, da je A* diagonalizabilna matrika *in matrika P* diagonalizira *matriko A.*

Naslednji izrek nam bo povedal, kdaj je matrika diagonalizabilna. Dokaz tega izreka je osnova za diagonalizacijo matrike.

Izrek 3.89 *Naj bo A kvadratna matrika reda n. Tedaj sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) A je diagonalizabilna,

(ii) A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Dokaz.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Naj bo torej A diagonalizabilna matrika. Tedaj obstaja regularna matrika P taka, da je $P^{-1}AP$ diagonalna matrika. Naj bodo $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$ stolpci matrike A in naj bo $D = P^{-1}AP$. Torej sta matriki P in D oblike:

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p_1} & \mathbf{p_2} & \cdots & \mathbf{p_n} \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

Ker je P regularna matrika, so po Trditvi 3.40 njeni stolpci linearno neodvisni vektorji. Ker jih je n, so potemtakem baza prostora $\mathbb{R}^n$. Nadalje velja

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ A\,P &= P\,D \end{aligned}$$

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{p_1} & \mathbf{p_2} & \cdots & \mathbf{p_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p_1} & \mathbf{p_2} & \cdots & \mathbf{p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

Z nekaj računanja ugotovimo, da je j-ti stolpec matrike $P\,D$ enak produktu $d_j\,\mathbf{p_j}$. Po drugi strani je j-ti stolpce matrike $A\,P$ enak $A\,\mathbf{p_j}$. Potemtakem je

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{p_1} &= d1\,\mathbf{p_1} \\ A\,\mathbf{p_2} &= d_2\,\mathbf{p_2} \\ &\vdots \\ A\,\mathbf{p_n} &= d_n\,\mathbf{p_n}\,. \end{aligned}$$

Tako so elementi diagonalne matrike D lastne vrednosti matrike A in stolpci matrike P so pripadajoči lastni vektorji, za katere smo videli, da so linearno neodvisni.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Naj bodo zdaj $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$ linearno neodvisni lastni vektorji matrike A in definirajmo matriko P tako, da so ti vektorje njeni stolpci:

$$P = \begin{bmatrix} \\ \mathbf{p_1} & \mathbf{p_2} & \cdots & \mathbf{p_n} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Tedaj je matrika $A\,P$ enaka

$$A\,P = \begin{bmatrix} \\ A\,\mathbf{p_1} & A\,\mathbf{p_2} & \cdots & A\,\mathbf{p_n} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Ker so vektorji $\mathbf{p_i}$ lastni vektorji, nadalje velja

$$\begin{aligned} A\,P &= \begin{bmatrix} \\ \lambda_1\,\mathbf{p_1} & \lambda_2\,\mathbf{p_2} & \cdots & \lambda_n\,\mathbf{p_n} \\ \\ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \\ \mathbf{p_1} & \mathbf{p_2} & \cdots & \mathbf{p_n} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= P\,D\,. \end{aligned}$$

Ker so stolpci $\mathbf{p_i}$ linearno neodvisni, je po Trditvi 3.40 matrika P obrnljiva, zato obstaja P^{-1} taka, da je

$$D = P^{-1}AP\,,$$

kar pomeni,da je A diagonalizabilna matrika.

∎

Zgled 3.90 *Diagonaliziraj matriko A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Potrebujemo dva linearno nedvisna vektorja in to sta ravno lastna vektorja matrike A. Matrika lastnih vektorjev je enaka

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in obratna matrika je

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še produkt

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = D\,.$$

Zgled 3.91 *Diagonaliziraj matriko A*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potrebujemo tri linearno nedvisne vektorje in to so ravno lastni vektorji matrike A. Matrika lastnih vektorjev je enaka

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in obratna matrika je

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še produkt

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D\,.$$

3.9 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

V tem razdelku bomo na kratko razpravljali o tem, kako lahko nastane sistem diferencialnih enačb. Za motivacijo vzemimo problem plen-plenilec. Smiselno je, da število plena vpliva na število plenilcev in prav tako velja obratno. Zato bi morala diferencialna enačba, ki ureja populacijo plena in plenilcev odvisna od števila obojih. To pripelje do dveh diferencialnih enačb, ki ju je treba hkrati rešiti, da bi določili populacije plena in plenilca.

Če posplošimo, nas bodo zanimali sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega. Sistem diferencialnih enačb je linearen, ko so njegove neznane funkcije linearne enačbe, t.j. neznanke se pojavljajo samo v prvi potenci. Red sistema je določen s stopnjo najvišjega odvoda, ki se pojavi v sistemu diferencialnih enačb in mi se bomo ukvarjali s sistemi prvega reda.

Ko se bomo naučili rešiti sistem linearnih diferencialnih enačb, bomo pogledali, kako prehajamo iz sistema linearnih diferencialnih enačb na diferencialno enačbo višjega reda in kako ta postopek izvedemo še v obratni smeri.

Poglejmo si za ilustracijo konkretnin primer homogenega sistema linearnih diferencialnih enačb, v katerem sta x_1 in x_2 neznani funkciji:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2\,x_2 \\ x_2' &= 3\,x_1 + 2\,x_2\,. \end{aligned}$$

Homogoni sistem linearnih diferencialnih enačb lahko zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}\,,$$

kjer je A kvadratna matrika koeficientov sistema, $\mathbf{x}$ je vektor neznanih funkcij, $\mathbf{x}'$ pa njegov odvod. Za zgoraj podani sistem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}.$$

Za $n = 1$ ima sistem obliko

$$x' = a\,x\,,$$

kar je ena sama diferencialna enačba prvega reda in njena rešitev je oblike

$$x(t) = C\,e^{a\,t}\,.$$

Zato poskusimo poiskati rešitev sistema za $n > 1$ v obliki

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}\,e^{\lambda\,t}\,.$$

Tedaj je

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{p}\,\lambda\,e^{\lambda\,t}\,.$$

Vstavimo v sistem in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\,\lambda\,e^{\lambda\,t} &= A\,\mathbf{p}\,e^{\lambda\,t} \\ (A - \lambda\,I)\mathbf{p}e^{\lambda\,t} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda\,I)\mathbf{p} &= \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

To pomeni, da je λ lastna vrednost matrike A in $\mathbf{p}$ pripadajoči lastni vektor.

Pri iskanju rešitve homogenega sistema diferencialnih enačb se bomo oprli na nekaj dejstev, ki jih ne bomo izpeljevali. Gre za posplošitev izreka, ki smo ga srečali pri navadnih diferencialnih enačbah.

Izrek 3.92 *Naj bodo* $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2}(t)$, $\ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *rešitve homogenega sistema diferencialnih enačb in naj bo* W *matrika reda* n*, katere stolpci so te rešitve. Če je* $detW \neq 0$*, tedaj je*

$$\mathbf{x}(t) = C_1\,\mathbf{x}^{(1)}(t) + C_2\,\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + C_n\,\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

splošna rešitev sistema, pri čemer so C_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, poljubne konstante.*

Glede na vrsto lastnih vrednosti, ločimo tri možnosti, ki si jih bomo v nadaljevanju pogledali.

(i) Lastne vrednosti so realne in različne

Naj bo torej A matrika reda dva in λ_1, λ_2 dve različni lastni vrednosti matrike A. V tem primeru sta pripadajoča lastna vektorja $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_2}$ linearno neodvisna in splošna rešitev je oblike

$$\mathbf{x} = C_1\,e^{\lambda_1\,t}\mathbf{p_1} + C_2\,e^{\lambda_2\,t}\mathbf{p_2}\,.$$

Zgled 3.93 *Reši sistem linearnih diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 3\,x_1 + 2x_2\,, \end{aligned}$$

če je

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo lastne vrednosti pripadajoče matrike,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\,I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-4) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4\,. \end{aligned}$$

Poiščimo pripadajoča lastna vektorja.

$\lambda_1 = -1$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$2\,p_1 + 2p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -p_2$$

Lastni vektor je tako

$$\mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ p_2 = 1\,.$$

$\lambda_2 = 4$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-3\,p_1 + 2p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{2}{3}\,p_2$$

Drugi lastni vektor je tako

$$\mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\,p_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ p_2 = 3\,.$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{x}(t) = C_1\,e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Za določitev konstant C_1 in C_2 moramo uporabiti začetni pogoj

$$\mathbf{x}(0) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix},$$

ki privede do reševanja sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} -C_1 + 2C_2 &= 0 \\ C_1 + 3C_2 &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\tfrac{8}{5},\ C_2 = -\tfrac{4}{5}\,.$$

Rešitev, ki se običajno poda v matrični obliki, je tako

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{8}{5}\,e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5}\,e^{4t}\begin{bmatrix} 2 \\ \\ 3 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{8}{5}\,(e^{-t} - e^{4t}) \\ x_2(t) &= -\tfrac{8}{15}\,(3e^{-t} - e^{4t})\,. \end{aligned}$$

(ii) Lastne vrednosti so kompleksne

Naj bo sedaj A matrika reda dva, kater lastni vredsnosti sta $\lambda_1 = \alpha + i\,\beta, \lambda_2 = \alpha - i\,\beta$. Pripadajoča lastna vektorja sta v tem primeru prav tako kompleksna in sicer tvorita konjugirani par. Torej naj bosta lastna vektorja

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + i\,\mathbf{b} \quad \text{in} \quad \overline{\mathbf{p}} = \mathbf{a} - i\,\mathbf{b}\,.$$

Tedaj je splošna rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\mathbf{x}(t) = C_1\,e^{\alpha\,t}(\cos(\beta\,t)\mathbf{a} - \sin(\beta\,t)\mathbf{b}) + C_2\,e^{\alpha\,t}(\sin(\beta\,t)\mathbf{a} + \cos(\beta\,t)\mathbf{b})\,.$$

Zgled 3.94 *Reši sistem linearnih diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x_1' &= 3\,x_1 - 9\,x_2 \\ x_2' &= 4\,x_1 - 3\,x_2\,, \end{aligned}$$

če je

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Poiščimo lastne vrednosti matrike A,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\,I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -9 \\ \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 27 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\,3\sqrt{3}\,i\,. \end{aligned}$$

Za lastno vrednost je tako realni del $\alpha = 0$ in imaginarni del je enak $\beta = 3\sqrt{3}$. Zadostuje poiskati prvi lastni vektor, ker je drugi njegova konjugirana vrednost.

$\lambda_1 = 3\sqrt{3}\,i$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 3-3\sqrt{3}\,i & -9 \\ 4 & -3-3\sqrt{3}\,i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Iz prve enačbe dobimo

$$\begin{aligned} (3-3\sqrt{3}\,i)p_1 - 9p_2 &= 0 \\ p_2 &= \tfrac{1}{3}(1-\sqrt{3}\,i)\,p_1\,. \end{aligned}$$

Tako je prvi lastni vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \frac{1}{3}(1-\sqrt{3}\,i)\,p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{3}\,i \end{bmatrix},\ p_1 = 3\,,$$

za katerega je

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Za rešitev sistema diferencialnih enačb niti ne potrebujemo drugega lastnega vektorja.

Splošna rešitev je tako

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1\,e^{0\cdot t}\left(\cos(3\sqrt{3}\,t)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(3\sqrt{3}\,t)\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right) + \\ & \quad C_2\,e^{0\cdot t}\left(\sin(3\sqrt{3}\,t)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(3\sqrt{3}\,t)\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \cos(3\sqrt{3}\,t)\left(C_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right) + \\ & \quad \sin(3\sqrt{3}\,t)\left(C_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_1\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right)\,. \end{aligned}$$

Za določitev konstant C_1 in C_2 moramo uporabiti začetni pogoj

$$\mathbf{x}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

ki privede do reševanja sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} 3\,C_1 &= 2 \\ C_1 - \sqrt{3}C_2 &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \tfrac{2}{3},\ C_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Rešitev je tako

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \cos(3\sqrt{3}\,t)\left(\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right) + \\ & \quad \sin(3\sqrt{3}\,t)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

oziroma

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3}\cos(3\sqrt{3}\,t)\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(3\sqrt{3}\,t)\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

oziroma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2\cos(3\sqrt{3}\,t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(3\sqrt{3}\,t) \\ x_2(t) &= -\frac{1}{3}\cos(3\sqrt{3}\,t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(3\sqrt{3}\,t)\,. \end{aligned}$$

(iii) Lastne vrednosti so večkratne

Naj ima sedaj matrika A reda dva večkratno realno lastno vrednost λ. Izkaže sem, da linearno neodvisno rešitvi sistema diferencialnih enačb dobimo s pomočjo novega vektorja $\mathbf{r}$, ki je definiran kot

$$(A - \lambda\, I)\mathbf{r} = \mathbf{p}\,,$$

kjer je $\mathbf{p}$ lastni vektor glede na λ. Rešitev sistema se izraža v obliki

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^{\lambda\, t}\,\mathbf{p} + C_2 e^{\lambda\, t}(t\mathbf{p} + \mathbf{r})\,.$$

Zgled 3.95 *Reši sistem linearnih diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x_1' &= 7\,x_1 + x_2 \\ x_2' &= -4\,x_1 + 3\,x_2\,, \end{aligned}$$

če je

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo lastne vrednosti pripadajoče matrike,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, I) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 10\,\lambda + 25 \\ &= (\lambda + 5)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 5\,. \end{aligned}$$

Poiščimo lastni vektor $\mathbf{p}$. Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$2\,p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -2\,p_1$$

Lastni vektor je tako

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ -2\,p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; p_1 = 1\,.$$

Nadalje poiščemo vektor $\mathbf{r}$. Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$2\,r_1 + r_2 = 1 \Rightarrow r_2 = 1 - 2\,r_1\,.$$

Vektor je v tem primeru

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \\ 1 - 2\,r_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \; r_1 = 0\,.$$

Splošna rešitev je

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^{5\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \left(t\, e^{5\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{bmatrix} + e^{5\,t} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \right) .$$

Za določitev konstant C_1 in C_2 moramo uporabiti začetni pogoj

$$\mathbf{x}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ -5 \end{bmatrix} = ,$$

ki privede do reševanja sistema linearnih enačb

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & 2 \\ -2\,C_1 + C_2 & = & -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2,\; C_2 = -1\,.$$

Rešitev je torej

$$\mathbf{x}(t) = e^{5\,t} \left(t \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

oziroma

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & e^{5t}\,(2 - t) \\ x_2(t) & = & e^{5t}\,(2t - 5)\,. \end{array}$$

Poglejmo si še nehomogeni sistem linearnih diferencialnih enačb, v katerem sta x_1 in x_2 neznani funkciji:

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' & = & x_1 + x_2 - e^t\,. \end{array}$$

Nehomogoni sistem linearnih diferencialnih enačb zapišemo v matrični obliki na sledeč način

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)\,,$$

kjer je A kvadratna matrika koeficientov sistema, $\mathbf{x}$ je vektor neznanih funkcij, $\mathbf{x}'$ njegov odvod, $\mathbf{f}$ pa vektor danih funkcij. Za zgoraj podan sistem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{in} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

Poglejmo še vse skupaj v splošnem na nehomogenem sistemu n linearnih diferencialnih enačb

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)\,.$$

Tedaj je matrika $\mathbf{A}$ reda n, preostali vektorji pa so reda $n \times 1$. Sistemu pridružimo homogeni sistem

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}\,.$$

Vemo že, da je njegova rešitev $\mathbf{x}_H(t)$ oblike

$$\mathbf{x}_H(t) = C_1\,\mathbf{x}^{(1)}(t) + C_2\,\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + C_n\,\mathbf{x}^{(n)}(t)\,.$$

Reševanja se lotimo na podoben načina kot pri linearnih diferencialnih enačb in sicer uporabimo metodo *variacije konstant*. To pomeni, da vse konstante v $\mathbf{x}_H(t)$ zamenjamo z novimi neznanimi funkcijami $C_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, s čimer dobimo nastavek za iskanje partikularne rešitve

$$\mathbf{x}_P(t) = C_1(t)\,\mathbf{x}^{(1)}(t) + C_2(t)\,\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + C_n(t)\,\mathbf{x}^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\,\mathbf{x}^{(i)}(t)\,.$$

Ta nastavek upoštevamo v začetnem nehomogenem sistemu linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n C_i(t)\,\mathbf{x}^{(i)}(t)\right)' &= A\left(\textstyle\sum_{i=1}^n C_i(t)\,\mathbf{x}^{(i)}(t)\right) + \mathbf{f}(t) \\ \textstyle\sum_{i=1}^n \left(C_i'(t)\,\mathbf{x}^{(i)}(t) + C_i(t)\,(\mathbf{x}^{(i)})'(t)\right) &= \textstyle\sum_{i=1}^n C_i(t)\left(A\,\mathbf{x}^{(i)}(t)\right) + \mathbf{f}(t)\,. \end{aligned}$$

Ker so funkcije $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ tudi vsaka zase rešitve pripadajočega homogenega sistema, velja

$$(\mathbf{x}^{(i)})' = A\,\mathbf{x}^{(i)}\,.$$

S tem se zgornja enačba poenostavi v

$$\textstyle\sum_{i=1}^n C_i'(t)\,\mathbf{x}^{(i)}(t) = \mathbf{f}(t)\,.$$

Rešimo jo glede na neznanke $C_i'(t)$, nato pa z nedoločenim integriranjem izračunamo neznane funkcije $C_i(t)$ in s tem splošno rešitev nehomogenega sistema

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_P(t)\,.$$

Zgled 3.96 *Reši sistem linearnih diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' &= x_1 + x_2 - e^t\,, \end{aligned}$$

pri pogoju

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo lastne vrednosti matrike pripadajočega homogenega dela,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\,\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2\,. \end{aligned}$$

Poiščimo pripadajoča lastna vektorja.

$\lambda_1 = 0$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -p_1$$

Lastni vektor je tako

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ -p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^{\,(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ p_1 = 1\,.$$

$\lambda_2 = 2$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2$$

Drugi lastni vektor je tako

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ p_1 = 1\,.$$

Rešitev homogenega dela je tako

$$\mathbf{x}_H(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nastavimo partikularno rešitev

$$\mathbf{x}_P(t) = C_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2(t)\, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neznani funkciji $C_1(t)$ in $C_2(t)$ iščemo iz pogoja

$$C_1'(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2'(t)\, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem enačb

$$\begin{aligned} C_1'(t) + e^{2t} C_2'(t) &= e^t \\ -C_1'(t) + e^{2t} C_2'(t) &= -e^t \\ \hline C_2'(t) &= 0 \Rightarrow C_2(t) = 0 \\ C_1'(t) &= e^t \Rightarrow C_1(t) = e^t \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je tako

$$\mathbf{x}_P(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

in rešitev začetne diferencialne enačbe je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_P(t) \\ &= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nekatere nehomogene sisteme linearnih diferencialnih enačb lahko rešujemo s pomočjo diagonalizacije matrike koeficientov. Naj bo

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

dani sistem in naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ različne lastne vrednosti ter $\mathbf{p_i}$ pripadajoči lastni vektorji. Matrika P je matrika, katere i-ti stolpec je i-ti lastni vektor matrike A. Matrika P je obrnljiva, saj so lastni vektorji linearno neodvisni. Vpeljimo nov vektor $\mathbf{y}$ tako, da velja

$$\mathbf{x} = P\,\mathbf{y}\,.$$

Tedaj je

$$\mathbf{x}' = P\,\mathbf{y}'\,.$$

To upoštevamo v sistemu diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} P\,\mathbf{y}' &= A\,P\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}' &= P^{-1}\,A\,P\,\mathbf{y} + P^{-1}\,\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}' &= D\,\mathbf{y} + \widetilde{\mathbf{f}}(t)\,, \end{aligned}$$

kjer je D diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi na diagonali. Tako je i-ta komponenta vektorja $\mathbf{y}$ enaka

$$y_i'(t) = \lambda_i\,y_i(t) + \widetilde{f}_i(t)\,,$$

kar je linearna diferencialna enačba prvega reda, zato je

$$y_i(t) = C_i\,e^{\lambda_i\,t} + e^{\lambda_i\,t}\int e^{-\lambda_i\,t}\widetilde{f}_i(t)\,dt\,.$$

Z upoštevanjem zveze

$$\mathbf{x} = P\,\mathbf{y}$$

nato dobimo še vektor iskanih funkcij $\mathbf{x}$.

Zgled 3.97 *S pomočjo diagonalizacije reši sistem linearnih diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' &= x_1 + x_2 - e^t\,, \end{aligned}$$

pri pogoju

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Omenili smo že, da lahko s pomočjo sistema diferencialnih enačb prvega reda rešujemo diferencialno diferencialno enačbo višjega reda. Ta metoda je primerna, kadar je lažje reševati sistem linearnih diferencialnih enačb, kot pa diferencialno enačbo višjega reda. V poštev pride predvsem pri numeričnem reševanju diferencialnih enačb.

Naj bo

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

diferencialna enačna n-tega reda. Vpeljimo nove funkcje $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ kot:

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & y(t), \\ x_2(t) & = & y'(t), \\ & \vdots & \\ x_{n-1}(t) & = & y^{(n-2)}(t), \\ x_n(t) & = & y^{(n-1)}(t). \end{array}$$

Izračunajmo njihove odvode:

$$\begin{array}{rclll} x_1'(t) & = & y'(t) & x_2(t), \\ x_2'(t) & = & y''(t) & x_3(t), \\ & \vdots & & \\ x_{n-1}'(t) & = & y^{(n-1)}(t) & x_n(t), \\ x_n'(t) & = & y^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)). \end{array}$$

Vidimo, da dobimo sistem linearnih diferencialnih enačb.

Zaradi nazornosti si poglejmo metodo na primeru, ki se ga sicer da analitično rešiti.

Zgled 3.98 *Zapiši diferencialno enačbo drugega reda*

$$2y'' + 5y' - 3y = 0,\ y(0) = -4,\ y'(0) = 9$$

s pomočjo sistema linearnih diferencialnih enačb prvega reda in jo na tak način reši.

Vpeljimo novi funkciji

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & y(t) \\ x_2(t) & = & y'(t)\,. \end{array}$$

Izračunajmo oba odvoda

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & y' = x_2 \\ x_2' & = & y'' = \frac{3}{2}\,y - \frac{5}{2}\,y' = \frac{3}{2}\,x_1 - \frac{5}{2}\,x_2\,. \end{array}$$

Podobno naredimo z začetnima pogojema

$$\begin{array}{rcl} x_1(3) & = & y(0) = -4 \\ x_2(3) & = & y'(0) = 9\,. \end{array}$$

S tem dobimo naslednji sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= \tfrac{3}{2}\,x_1 - \tfrac{5}{2}\,x_2\,, \end{aligned}$$

če je

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo lastne vrednosti pripadajoče matrike

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \tfrac{3}{2} & -\tfrac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \tfrac{5}{2}\lambda - \tfrac{3}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda + 3)(2\,\lambda - 1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Poiščimo pripadajoča lastna vektorja.
$\lambda_1 = -3$
Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \tfrac{3}{2} & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$3\,p_1 + 2p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = -3\,p_2$$

Lastni vektor je tako

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ -3\,p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},\ p_1 = 1\,.$$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$
Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} & 1 \\ \tfrac{3}{2} & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\,p_1 + 2p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}\,p_1$$

Drugi lastni vektor je tako

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \frac{1}{2}\, p_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\; p_1 = 1\,.$$

Splošna rešitev je enaka

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + C_2\, e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za določitev konstant C_1 in C_2 moramo uporabiti začetni pogoj

$$\mathbf{x}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix},$$

ki privede do reševanja sistema linearnih enačb

$$\begin{array}{rcl} C_1 + 2C_2 & = & -4 \\ -3C_1 + C_2 & = & 9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\tfrac{22}{7},\, C_2 = -\tfrac{3}{7}\,.$$

Rešitev, ki se običajno poda v matrični obliki, je tako

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{22}{7}\, e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{3}{7}\, e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$y(t) = x_1(t) \;=\; -\tfrac{22}{7}\, e^{-3t} - \tfrac{6}{7}\, e^{\frac{1}{2}t}$$

Lahko pa naredimo seveda tudi obratno, da sistem linearnih diferencialnih enačb prevedemo na diferencialno višjega reda. To metodo uporabimo takrat, ko je ustrezno dobljeno diferencialno enačbo višjega reda lažje rešiti kot dani sistem. Poglejmo si metodo na Zgledu **??**.

Zgled 3.99 ?? *Rešimo sistem diferencialnih enačb*

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & -x_2 \\ x_1' - x_2' & = & 3\,x_1 + x_2\,, \end{array}$$

če je

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

s pomočjo prevedbe na diferencialno enačbo višjega reda.

Izračunamo odvod prve enačbe

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_1'' &= -x_2'\,, \end{aligned}$$

ter upoštevamo v drugi enačbi

$$\begin{aligned} x_1' - x_2' &= 3\,x_1 + x_2 \\ x_1' - x_1'' &= 3\,x_1 - x_1' \\ x_1'' + 2\,x_1' - 3x_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Korena karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

sta -3 in 1, zato je rešitev

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\,e^{-3t} + C_2\,e^t \\ x_2(t) &= 3C_1\,e^{-3t} - C_2\,e^t\,. \end{aligned}$$

Iz začetnih pogojev izračunamo konstanti

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= 3C_1 - C_2\,, \end{aligned}$$

od koder dobimo $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. Iskana partukularna rešitev je tako

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{2}(\,e^{-3t} + e^t) \\ x_2(t) &= -x_1'(t) = \tfrac{1}{2}(3\,e^{-3t} -\ e^t)\,. \end{aligned}$$

Ta metoda deluje tudi v priemeru, ko sistem linearnih enačb ni samomprvega reda. Poglejmo jo na naslednjem zgledu.

Zgled 3.100 *Rešimo sistem diferencialnih enačb*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_1'' - x_2' &= 4\,x_1 + 2x_2\,, \end{aligned}$$

s pomočjo prevedbe na diferencialno enačbo višjega reda.

Izračunamo odvod prve enačbe

$$x_1'' = -x_2'$$

ter upoštevamo v drugi enačbi tako, da se znebimo funkcije x_2:

$$\begin{aligned} x_1'' - x_2' &= 4\,x_1 + 2x_2 \\ x_1'' + x_1'' &= 4\,x_1 - 2x_1' \\ 2\,x_1'' + 2\,x_1' - 4\,x_1 &= 0 \\ x_1'' + x_1' - 2\,x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Korena karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

sta 2 in -1, zato je rešitev

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-t} \\ x_2(t) &= -x_1'(t) = 2C_1\,e^{2t} - C_2\,e^{-t}\,. \end{aligned}$$

3.10 Naloge

3.10.1 Vektorski prostori

1. Na množici $\mathbb{R}^2$ naj bosta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem:
$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \lambda\,(x_1, x_2) &= (x_1, \lambda\,x_2) \end{aligned}$$
   Ali je $\mathbb{R}^2$ s tako definiranima operacijama vektorski prostor?

2. Na množici $\mathbb{R}^3$ naj bo definirana standardno seštevanje, množenja s skalarjem pa na sledeč način
$$\lambda\,(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \lambda\,x_3)$$
   Ali je $\mathbb{R}^3$ s tako definiranima operacijama vektorski prostor?

3. Na množici $\mathbb{R}^2$ naj bo definirana standardno množenje s skalarjem, seštevanje pa na sledeč način
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + 3\,y_1, 2\,x_2 + y_2)$$
   Ali je $\mathbb{R}^2$ s tako definiranima operacijama vektorski prostor?

4. Naj bo M množica vseh točk premice skozi koordinatno izhodišče v $\mathbb{R}^2$, kjer imamo standardni operaciji sešteveanja in množenja s skalarjem. Ali je M vektorski prostor?

5. Naj bo M množica vseh točk premice, ki ne gre skozi koordinatno izhodišče v $\mathbb{R}^2$, kjer imamo standardni operaciji seštevenja in množenja s skalarjem. Ali je M vektorski prostor?

6. Naj bo M množica vseh točk oblike $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, za katere je $x_1 > 0$, pri čemer sta operaciji seštevanja in množenja standardni. Ali je M vektorski podprostor od $\mathbb{R}^2$?

7. Naj bo $\mathcal{M}_n$ vektorski prostor matrik s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem.

   a) Ali je množica vseh diagonalnih matrik vektorski podprostor od $\mathcal{M}_n$?

   b) Ali je množica vseh matrik oblike

   $$\begin{bmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

   vektorski podprostor od $\mathcal{M}_2$?

8. Naj bo $\mathcal{F}[a, b]$ množica realnih funkcij na $[a, b]$.

   a) Ali je množica vseh polinomov stopnje kvečjemu n, $\mathbb{R}_n[x]$, vektorski podprostor $\mathcal{F}[a, b]$?

   b) Ali je množica vseh funkcij, za kater je $f(5) = 10$ vektorski podprostor od $\mathcal{F}[a, b]$, če je $a \leq 5 \leq b$?

9. Naj bo $\mathcal{W}$ množica točk ravnine skozi koordiantno izhodišče v $\mathbb{R}^3$. Ugotovi, ali je $\mathcal{W}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$ s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem.

10. Naj bo $\mathcal{W}$ množica matrik oblike

   $$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \\ d & e \end{bmatrix}.$$

   Ugotovi, ali je $\mathcal{W}$ vektorski podprostor prostora pravokotnih matrik $\mathcal{M}_{32}$ s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem.

3.10.2 Linearna neodvisnost

1. Poišči linearno lupino, določeno z vektorjema

$$\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1), \mathbf{y} = (0, 2, 0, -1)\,.$$

2. Poišči linearno lupino, določeno z vektorjema (matrikama)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Poišči tako množico vektorjev, da bo njihova linearna lupina enaka $\mathbb{R}_n[x]$.

4. Preveri, ali je linearna lupina vektorjev

$$\mathbf{x_1} = (2, 0, 1),\, \mathbf{x_2} = (-1, 3, 4), \mathbf{x_2} = (1, 1, -2)$$

enaka $\mathbb{R}^3$.

5. Dani so vektorji iz $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{x_1} = (1, -2, 0, 1),\, \mathbf{x_2} = (0, 1, -1, -3),\, \mathbf{x_3} = (1, 0, -2, -5),\, \mathbf{x_4} = (-3, 5, 1, 0)\,.$$

Ali je vektor $\mathbf{x_4}$ linearna kombinacija preostalih treh vektorjev?

6. Preveri, ali je naslednja množica vektorjev (matrik) linearno neodvisna.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Preveri linarno neodvisnost vektorjev $(1, -2, 3, -4), (-1, 3, 4, 2), (1, 1, -2, -2)$.

8. a) Pokaži, da vektorji $\mathbf{v_1} = (1, -1, 1), \mathbf{v_2} = (0, 1, 2), \mathbf{v_3} = (3, 0, -1)$ določajo bazo $\mathcal{B}$ prostora $\mathbb{R}^3$.

   b) Naj bo $\mathcal{B}'$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^3$. Izračunaj $[u]_{\mathcal{B}}$, če je $[u]_{\mathcal{B}'} = (9, -1, 8)$.

3.10.3 Baza

1. Ali je množica vektorjev
$$\mathbf{x_1} = (2, 0, 1),\ \mathbf{x_2} = (-1, 3, 4),\ \mathbf{x_3} = (1, 1, -2)$$
baza prostora $\mathbb{R}^3$?

2. Ali je množica vektorjev
$$\mathbf{x_1} = (1, -1, 1),\ \mathbf{x_2} = (0, 1, 2),\ \mathbf{x_3} = (3, 0, -1)$$
baza prostora $\mathbb{R}^3$?

3. Ali je množica vektorjev
$$\mathbf{x_1} = (1, 0, 1),\ \mathbf{x_2} = (0, 3, 4), \mathbf{x_2} = (1, 1, 0),\ \mathbf{x_4} = (1, 1, 1)$$
baza prostora $\mathbb{R}^3$?

4. Dana je množica vektorjev
$$M = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}.$$
   a) Pokaži, da množica M ni baza prostora $\mathbb{R}^4$?
   b) Dopolni M tako, da bo baza prostora $\mathbb{R}^4$.

5. Reduciraj dano množico tako, da bo baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$:
$$\mathbf{p_0} = 2,\ \mathbf{p_1} = -2\,x,\ \mathbf{p_2} = x - 4,\ \mathbf{p_3} = x^2 - 4x,\ \mathbf{p_4} = x^2 + 2x + 1\,.$$

6. Poišči koordinatni vektor za $\mathbf{p} = 4 - 2\,x + 3\,x^2$ glede na
   a) standardno bazo prostora polinomov stopnje kvečjemu dva $\mathbb{R}_2[x]$,
   b) bazo $\mathbf{x_1} = 2$, $\mathbf{x_2} = -4\,x$, $\mathbf{x_3} = 5\,x^2 - 1$.

7. Dani sta množici $\mathcal{B} = \{(1, -1), (0, 6)\}$ in $\mathcal{C} = \{(2, 1), (-1, 4)\}$.
   a) Pokaži, da sta obe množici bazi prostora $\mathbb{R}^2$,
   b) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.
   c) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v $\mathcal{C}$.

8. Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 2), (3, 0, -1)\}$ v standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ ter prav tako matriko prehoda iz standardne baze v bazo $\mathcal{B}$.

9. Naj bo $\mathcal{B}$ standardna baza prostora matrik reda dva $\mathcal{M}_n$ in $\mathcal{C} = \{\mathbf{x_1},\, \mathbf{x_2},\, \mathbf{x_3},\, \mathbf{x_4}\}$, kjer je

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   a) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.
   b) Poišči matriko, katere koordinatni vektor je $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = (-8, 3, 5, -2)$.

10. Naj bo $\mathcal{B}$ standardna baza prostora polinomov stopnje kvečjemu dva $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathcal{C} = \{\mathbf{x_1},\, \mathbf{x_2},\, \mathbf{x_3},\, \mathbf{x_4}\}$, kjer je $\mathbf{x_1} = 2$, $\mathbf{x_2} = -4\,x$, $\mathbf{x_3} = 5\,x^2 - 1$.

    a) Poišči matriko prehoda iz baze $\mathcal{C}$ v $\mathcal{B}$.
    b) Poišči polinom, katerega koordinatni vektor je $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = (-4, 3, 11)$.

3.10.4 Evklidski prostori

1. V prostoru $\mathcal{M}_{nm}$ definiramo produkt dveh matrik na sledeč način

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A})\,.$$

   Preveri, če je $\mathcal{M}_{nm}$ s tako definiranim produktom evklidski prostor.

   (*Sled* matrike A, $\mathrm{tr}(A)$, je vsota njenih diagonalnih elementov.)

2. Naj bosta $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^n$ in naj bodo $w_1, w_2, \ldots, w_n$ pozitivna realna števila (uteži). Pokaži, da je

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i u_i v_i\,.$$

   skalarni produkt.

   (Ta produkt imenujemo *uteženi* standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^n$.)

3. Naj bosta $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$ in $\mathbf{v} = (3, 2, 0)$ vektorja iz $\mathbb{R}^3$, ki je opremljen z uteženim standardnim skalarnim produktom, pri čemer so uteži $w_1 = 2, w_2 = 6, w_3 = \frac{1}{5}$. Izračunaj

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\,, ||\mathbf{u}||, d(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,.$$

4. Dana sta vektorja $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$ in $\mathbf{v} = (3, 2, 0)$ iz $\mathbb{R}^3$. Ali sta ortogonalna glede na

   a) standardni produkt,
   b) uteženi standardni produkt iz prejšnje naloge.

3.10.5 Ortonormirana baza

1. Glede na standardni skalarni produkt skunstruiraj iz vektorjev $\mathbf{x_1} = (1, -1, 0), \mathbf{x_2} = (2, 1, -3), \mathbf{x_3} = (0, 2, 1))$ ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

2. V evklidskem prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ s skalarnim produktom

$$\langle \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2} \rangle = \int_0^1 p_1(x) p_2(x)\, dx$$

   poišči kako ortogonalno bazo.

3. Razširi množico $S = \{(2, 0, -1), (2, 0, 4)\}$ v ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}_3[x]$ glede na standardni skalarni produkt.

4. Iz baze $\mathbf{v_1} = (1, 1, 1, 1), \mathbf{v_2} = (1, 1, 1, 0), \mathbf{v_3} = (1, 1, 0, 0), \mathbf{v_4} = (1, 0, 0, 0)$ prostora $\mathbb{R}^4$ s standardnim evklidskim skalarnim produktom skonstruiraj ortonormirano bazo.

3.10.6 Fourierova vrsta

1. Funkcijo f,

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 - x^2 & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 \quad ; & \quad \pi \le x \le 4, \end{cases},$$

   za katero velja $f(-x) = f(x)$ razvij v Fourierovo vrsto.

2. Funkcijo $f : [0, \pi]$, $f(x) = \cos x$ s periodo π razvij v Fourierovo vrsto.

3.10.7 Linearne preslikave

1. Določi matriko, ki jo porodi preslikava zrcaljenja preko xy-ravnine v $\mathbb{R}^3$.

2. Določi matriko, ki jo dobimo s preslikavo zrcaljenja preko y-os, ki mu sledi zrcaljenje preko x-osi.

3. Določi matriko, ki jo dobimo s preslikavo vrtenja za kot ϕ v pozitivni smeri v $\mathbb{R}^2$. .

4. Določi eksplicitno formulo linearne preslikave $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, določene s podatki

$$f(\mathbf{u_1}) = (2, -1, -1), f(\mathbf{u_2}) = (2, -3, 1), f(\mathbf{u_3}) = (4, -4, 0), f(\mathbf{u_4}) = (-5, 2, 3)\,,$$

   kjer so $\mathbf{u_i}$ bazni vektorji in sicer

$$\mathbf{u_1} = (1, 0, 0, 0), \mathbf{u_2} = (1, -2, 1, 0), \mathbf{u_3} = (1, -1, 0, 1), \mathbf{u_4} = (0, 0, 0, 1)\,.$$

5. Izračunaj rang in defekt linearne preslikave $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ podane s predpisom

$$f(\mathbf{e_1}) = (1,0,1,1), f(\mathbf{e_2}) = (0,1,1,1), f(\mathbf{e_3}) = (1,-1,0,0)\,,$$

kjer so vektorji $\mathbf{e_i}$ standardni bazni vektorji.

6. Ali sta vektorja $\mathbf{x_1} = (1,2,0,-1)$ in $\mathbf{x_2} = (-2,1,-1,0)$ elementa vektorskega prostora $\operatorname{Ker} f \subseteq \mathbb{R}^4$, če je

$$f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} \quad \text{in} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Izračunaj kakšno bazo jedra linearne preslikave $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ podane s

$$f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Linearni preslikavi $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pripada glede na bazo $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$ in $\mathcal{B}' = \{(1,2),(1,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Pošči podprostora $\mathcal{K}er\, f$ in $\mathcal{I}m\, f$ in zapiši njuni bazi.

   b) Kakšna matrika pripada preslikavi f v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$?

9. Določi eksplicitni predpis endomorfizma prostora $\mathbb{R}^3$, za katerega velja $\mathcal{I}m\, f = \mathcal{L}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})$, kjer je $\mathbf{y_1} = (2,-1,1)$ in $\mathbf{y_1} = (2,-2,1)$.

3.10.8 Lastne vrednosti in lastni vektorji

1. Poišči lastne vrednosti endomorfizma $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, določenega s predpisom

$$f(x,y) = (-2x + y, 4x + y)\,.$$

2. Poišči lastne vrednosti in lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Poišči lastne vrednosti in lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Poišči lastne vrednosti in lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Ali sta vektorja $\mathbf{x_1} = (-1, 1, 0, 0)$ in $\mathbf{x_2} = (2, 1, -1, 0)$ iz $\mathbb{R}^4$ lastna vektorja matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Poišči matriko P, ki diagonalizira matriko

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Če se da, diagonaliziraj matriko

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

3.10.9 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

1. Reši sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= -5\,x_1 + x_2 \\ x_2' &= 4\,x_1 - 2\,x_2\,, \end{aligned}$$

   če je

$$\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Reši sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \tfrac{3}{2}\,x_2 \\ x_2' &= -\tfrac{1}{6}\,x_1 - 2\,x_2\,, \end{aligned}$$

   če je

$$\mathbf{x(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Reši sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= 2\,x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= -x_1\,, \\ x_3' &= x_1 + x_2 - x_3\,, \end{aligned}$$

   če je

$$\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Reši sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= -5\,x_1 + x_2 - 6e^{2t} \\ x_2' &= 4\,x_1 - 2\,x_2 - e^{2t}\,. \end{aligned}$$

5. Reši sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= 3\,x_1 - 13\,x_2 \\ x_2' &= 5\,x_1 + x_2\,, \end{aligned}$$

   če je

$$\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Slike

Stvarno kazalo