Uvod v linearno algebro

Matrike

1. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Izračunaj naslednje izraze, če obstajajo $A+B$, $A+B^T$, $A+C$, $A+C^T$, $B+C$, $B+C^T$, AB, AB^T, AC, AC^T, BA, BA^T, CA, CA^T.

2. Za naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & \sin x & 0 \end{bmatrix}$$

3. Za naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Reši matrično enačbo $AX = B$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

5. Reši matrično enačbo $AX = B$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

6. Poišči vse matrike z lastnostjo $A^2 = I$.

7. Poišči matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Poišči matrike, ki komutirajo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanta

1. Izračunaj determinanto naslednjih matrik:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

   (c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

   (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

   (f) $F = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$

2. Števila 11934, 11713, 76296, 59874 in 55335 so deljiva s 17. Dokaži, da je tudi determinanta matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & 9 & 8 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

   deljiva s 17.

3. S pomočjo razvoja determinante po vrstici oziroma po stolpcu izračunaj

$$A = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{bmatrix}.$$

4. S pomočjo Gaussove eliminacije izračunaj determinanto matrike $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{bmatrix}.$$

5. Dokaži, da je $\det(A) = (a^2 - b^2)^n$, kjer je $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}.$$

6. Poišči splošna člena zaporedij, ki sta podana rekurzivno:

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ in $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$,

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ in $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

   (Pomoč: če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tedaj $a_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$; če je $\lambda_1 = \lambda_2$, tedaj $a_n = a\lambda_1^n + bn\lambda_1^n$.)

7. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrika

1. Izračunaj inverzne matrike naslednjih matrik:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

   (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

   (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$,

   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Reši matrično enačbo $AXB = C$, kjer so $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

3. Reši matrično enačbo $2AX - 3A = BX$, kjer sta
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -4 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Reši matrično enačbo
$$A^{-1}XA^2 = A^{-1}BA - 2A^{-1}XA,$$
kjer sta
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Reši matrično enačbo
$$(XA)^T - 3B^T = 3A - BX^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Sistemi linearnih enačb

1. Poišči rešitve sistemov enačb.

   (a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & -2 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2w & = & -2 \\ x & + & y & - & z & - & w & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & 3z & - & w & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & -1 \end{array}$$

   (c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & w & - & u & = & -6 \\ -x & + & 2y & - & z & - & w & + & u & = & 11 \\ 2x & - & y & + & 2z & & & + & 3u & = & -2 \end{array}$$

2. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax + 2y &= -a \\ ay - z &= -a \\ 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

3. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} (a-1)x - y + 2z &= 1 \\ -x + ay + z &= a \\ x - 2y + az &= 0. \end{aligned}$$

4. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax - y - z &= a \\ (a+1)y + z &= -1 \\ 2x + y + (a-1)z &= 0. \end{aligned}$$

5. V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Uporaba v kemiji

1. Zagotovi kemijsko ravnovesje v formuli

$$\mathrm{Cu_2S} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{Cu} + \mathrm{SO_2}.$$