

# Integralni račun

## Nedoločeni integral in integracijske metode

1. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a)  $\int dx$

(b)  $\int x^3 + 3 + x^{-2} dx,$

(c)  $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{4x} dx,$

(d)  $\int 13^x + e^x + 13 dx,$

(e)  $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x} dx,$

(f)  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx,$

(g)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx,$

(h)  $\int \frac{1}{16x^2 + 4} dx,$

(i)  $\int \frac{1}{x^2 - 36} dx,$

(j)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 18}} dx,$

(k)  $\int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 100}} dx,$

(l)  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx,$

$$(m) \int \sinh(ax) dx,$$

$$(n) \int \frac{2^x}{3^{x-1}} dx,$$

$$(o) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$$

2. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj naslednje nedoločene integrale:

$$(a) \int \frac{1}{3x + 9} dx,$$

$$(b) \int \frac{1}{ax + b} dx, \text{ kjer je } a \neq 0,$$

$$(c) \int \frac{x}{(x^2 + 5)^{505}} dx,$$

$$(d) \int \frac{x^3}{x^8 + 2} dx$$

$$(e) \int \cos 2x + \sin 2x dx,$$

$$(f) \int \cos^2 x dx,$$

$$(g) \int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx,$$

$$(h) \int \tan x dx,$$

$$(i) \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$$

$$(j) \int x^2 e^{x^3} dx,$$

$$(k) \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 25} dx,$$

$$(l) \int \frac{1}{x \ln x^2} dx,$$

$$(m) \int 2^x (2^x + 1)^{2014} dx.$$

$$(n) \int \frac{1}{(1 + x^2) \arctan x} dx,$$

(o)  $\int \frac{x-2}{x^2+x+1} dx,$

(p)  $\int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx,$

(q)  $\int \frac{x}{x^2+x+3} dx.$

3. Z uporabo integriranja po delih izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a)  $\int x \cos x dx,$

(b)  $\int (x^2+1) \sin x dx,$

(c)  $\int x^2 \arctan x dx,$

(d)  $\int 2xe^{2x} dx,$

(e)  $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx,$

(f)  $\int x^2 \cosh x dx,$

(g)  $\int \ln x dx,$

(h)  $\int x^2 \ln^2 x dx,$

(i)  $\int x^9 \ln x^3 dx.$

4. Izpelji formulo za integrale

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx \quad \text{in} \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx$$

ter izračunaj  $\int e^x \sin 2x dx$  in  $\int e^{2x} \cos 4x dx.$

5. S pomočjo parcilanih ulomkov izračunaj naslednje nedoločene integrale racionalnih funkcij:

(a)  $\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx,$

- (b)  $\int \frac{3}{x^2 + 3x + 2} dx,$   
(c)  $\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)^2} dx,$   
(d)  $\int \frac{-x^3 + 2x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 4)} dx,$   
(e)  $\int \frac{-x^3 + x^2 + 4}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 1)} dx,$   
(f)  $\int \frac{x - 2x^2}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 5)} dx.$

6. S pomočjo metode Ostogradskega izračunaj naslednje nedoločene integrale racionalnih funkcij:

- (a)  $\int \frac{2x^2}{(x^2 - 1)^2} dx,$   
(b)  $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2} dx,$   
(c)  $\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)^2} dx,$   
(d)  $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx.$

7. Izračunaj naslednje nedoločene integrale iracionalnih funkcij:

- (a)  $\int \sqrt[3]{(3x+6)^4},$   
(b)  $\int \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^7}} dx,$   
(c)  $\int x\sqrt{x-2} dx,$   
(d)  $\int x\sqrt{x^2+1} dx,$   
(e)  $\int \sqrt{1-x^2} dx,$   
(f)  $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$   
(g)  $\int \frac{x^2+x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx,$

- (h)  $\int \sqrt{x^2 - x} dx,$   
 (i)  $\int \sqrt{2x^2 + 2x + 1} dx,$   
 (j)  $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{2 - x - 2x^2}} dx,$   
 (k)  $\int \frac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 4}} dx,$   
 (l)  $\int \frac{1}{(x - 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx,$  (uporabi  $t = \frac{1}{x-2}$ ).

8. Izračunaj

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx.$$

Integrale oblike  $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$  izračunamo tako, da uvedemo novo spremenljivko  $t^p = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

9. Izračunaj naslednje nedoločene integrale funkcij sinus in cosinus:

- (a)  $\int \sin^4 x dx,$   
 (b)  $\int \sin^3 x \cos x dx,$   
 (c)  $\int \cos^n x \sin x dx,$   
 (d)  $\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x} dx,$   
 (e)  $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x \cos x} dx,$   
 (f)  $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx,$   
 (g)  $\int \frac{1}{2 \sin x - 3 \cos x + 3} dx,$   
 (h)  $\int \frac{1}{4 - 3 \cos^2 x} dx,$   
 (i)  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx,$

$$(j) \int \sin 2x \cos 3x \, dx,$$

$$(k) \int \sin 2x \sin 5x \, dx,$$

$$(l) \int \cos x \cos 4x \, dx.$$

## Določeni integral in njegova uporaba v geometriji

1. Izračunaj naslednje določene integrale:

(a)  $\int_{-1}^1 (1 - 3x^2) dx,$

(b)  $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx,$

(c)  $\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 x + \sin 2x dx,$

(d)  $\int_0^1 \frac{x2^x}{1+2x^2} dx.$

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo grafi funkcij  $y = 0$ ,  $y = -x^2 + 4$  in  $y = x + 2$ .

3. Izračunaj ploščino območja med  $f(x) = x$  in  $g(x) = \frac{x^3}{4}$ .

4. Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije  $f(x) = x^2 - 4$  na intervalu  $[-2, 2]$ .

5. Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije  $f(x) = \frac{2x + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$  na intervalu  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

6. S pomočjo integrala izračunaj ploščino elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$$

7. S pomočjo integrala izpelji formulo za računanje ploščine elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

8. Izračunaj ploščino tistega dela elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ , ki leži nad grafom funkcije  $f(x) = \frac{9x^2}{32}$ .

9. Izračunaj dolžino loka krivulje  $y = \sqrt{1+2x}$  v mejah  $0 \leq x \leq 1$ .

10. Izračunaj dolžino loka krivulje  $y = \ln(x)$  na intervalu  $[1, e]$ .
11. Izračunaj obseg lika, ki ga ograjujeta parabola  $x^2 = 4y$  in premica  $x = 1$ .
12. Izračunaj obseg lika, ki ga določata krivulji  $x = y^2 - 1$  in  $y = x - 1$ .
13. Izračunaj prostornino rotacijske telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje  $y^2 = \frac{x(x-3)}{x-4}$  okoli osi  $x$  na območju  $0 \leq x \leq 3$ .
14. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje  $y = \sin x$  med njenima dvema zaporednima ničloma okoli osi  $x$ .
15. Izračunaj volumen torusa s polmeroma  $R$  in  $r$ ,  $R > r$ .
16. Izračunaj prostornino rotacijskih teles, ki jo dobiš z vrtenjem lika, ki ga ograjujejo parabola  $y^2 = 4x$ , premica  $y = 2$  in os  $y$ , okrog osi  $x$  oziroma osi  $y$ .
17. Izračunaj površino ploskve, ki nastane z vrtenjem krivulje  $y = (3 - x)\frac{\sqrt{x}}{3}$  okoli osi  $x$  na intervalu  $[0, 3]$ .



## Posplošeni integral

1. Izračunaj posplošene integrale:

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4} dx,$

(b)  $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} dx,$

(c)  $\int_0^1 x \ln x dx,$

(d)  $\int_0^1 x \ln^2 x dx,$

(e)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} dx.$

2. Izračunaj naslednje posplošene integrale

(a)  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx,$

(b)  $\int_0^{\infty} x^{\frac{5}{2}} e^{-x} dx.$

3. Ali obstajata integrala

(a)  $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{1+x^2} dx.$

(b)  $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

4. Dokaži, da obstaja integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx \quad \text{in} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx.$$

Preveri, da sta enaka.

5. Izračunaj volumen in površino vrtenine, ki nastane, če graf funkcije  $y = x^{-\frac{5}{2}}$ ,  $x \in [1, \infty]$  zavrtimo okoli  $x$  osi.

## Numerično integriranje

1. S pomočjo trapeznega in Simpsonovega pravila izračunaj

$$\int_1^{2,2} \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx.$$

Primerjaj izračunane vrednosti z rezultatom, ki ga dobiš, ko integral izračunaš z Mathematico.