Navadne diferencialne enačbe

Navadne diferencialne enačbe prvega reda

V celotnem poglavju bo
$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Diferencialne enačbe z ločljivima spremeljivkama

Diferencialna enačba z ločljivima spremeljivkama je oblike
$$y'g(y) = f(x)$$
in jo rešujemo
$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

1. Poišči splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb:
   (a) $y' = 3x^2(1 + y^2)$,
   (b) $yy' = 2(xy + x)$,
   (c) $y' = \dfrac{(y+1)^2}{(x+1)^2}$,
   (d) $(9 + x^2)y' = -33\sqrt{9 - y^2}$.
2. Poišči tisto rešitev naslednjih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:
   (a) $(5x^2 + 1)y' - 20xy = 10x$, $y(0) = \frac{1}{2}$,
   (b) $3y - x(1 + 3y)y' = 0$, $x(1) = e$.

Homogena diferencialna enačba

Homogena diferencialna enačba je oblike

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

in jo rešujemo tako, da vpeljemo novo spremeljivko

$$z = \frac{y}{x}.$$

Tedaj

$$y = z \cdot x \quad \text{in} \quad y' = z'x + z.$$

S to vpeljavo diferencialno enačbo z ločljivima spremeljivkama.

1. Poišči splošno rešitev naslednjih homogenih enačb:
   (a) $y' = \frac{x^2+y^2}{x^2}$,
   (b) $x^2y' = xy - y^2$,
   (c) $x^2y' = y^2 + 2xy$,
   (d) $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.
2. Poišči tisto rešitev naslednjih homogenih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:
   (a) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$, $y(4) = 3$,
   (b) $3y^3 - x^3 = 3xy^2y'$, $y(1) = 2$,

Linearna diferencialna enačba prvega reda

Linearna diferencialna enačba prvega reda je oblike

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kjer sta f in g poljubni zvezni funkciji. To diferencialno enačbo rešujemo tako, da najprej rešimo

$$y' + f(x)y = 0$$

in dobimo homogoeno rešitev y_H. Po izreku, da je rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y = y_H + y_P,$$

kjer je y_P partikularno rešitev, je potrebno poiskati samo še partikularno rešitev. To lahko ali uganemo, ali pa jo poiščemo z variacijo konstante

$$y_P = C(x)y_H.$$

1. Poišči splošno rešitev naslednjih linearnih diferencialnih enačb:
   (a) $xy' + 2y = x^3$,
   (b) $x^2y' + xy + 1 = 0$,
   (c) $xy' + 2(1 - x^2)y = 1$,
   (d) $y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$.
2. Poišči tisto rešitev naslednjih linearnih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:
   (a) $xy' + xy = 1 - y$, $y(1) = 0$,
   (b) $xy' + y = x^2 \ln x$, $y(1) = 0$.

Bernoullijeva diferencialna enačba

Bernoullijeva diferencialna enačba (Jakob Bernoulli, 1654 - 1705; Leibniz rešil že leta 1696) je oblike

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha},$$

kjer sta f in g zvezni funkciji (za $\alpha = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $\alpha = 1$ pa homogeno diferencialno enačbo). Recimo $\alpha \notin \{0, 1\}$. Zgornjo enačbo delimo z y^{α}

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$

Sedaj vpeljemo novo spremeljivko $z = y^{1-\alpha}$. Tako je $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ in

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x)$$

oziroma

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x).$$

1. Poišči splošno rešitev naslednjih Bernoullijevih diferencialnih enačb:
   (a) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{2yx^4}$,
   (b) $y' + y = xy^{\frac{2}{3}}$.
2. Poišči tisto rešitev naslednjih Bernoullijevih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:
   (a) $y' + y = xy^3$, $y(0) = 1$,
   (b) $2y' + \dfrac{3y}{x\ln x} = 3y^{\frac{1}{3}}$, $y(e) = 0$,

Riccatijeva diferencialna enačba

Riccatijeva diferencialna enačba je oblike

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y = h(x).$$

V primeru, ko je $h(x) = 0$ imamo Bernoullijevo diferencialno enačbo. V splošnem te enačbe ne znamo dobor reševati, zato običajno uganemo partikularno rešitev. Nadaljujemo pa z nastavkom

$$y = y_1 + z.$$

1. Poišči splošno rešitev Riccatijevih diferencialnih enačb, če je podana še partikularna rešitev y_1.

   (a) $y' = y^2 + (1 - 2x)y + x^2 - x + 1$, $y_1 = x$,

   (b) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$, $y_1 = e^x$.

2. Poišči splošne rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $(1 - x^2)y' = 1 - y^2$,

   (b) $y' = y^2 - 2ye^x + e^{2x} + e^x$, pri pogoju $y(0) = 0$.

Clairautova diferencialna enačba

Clairautova diferencialna enačba je oblike

$$y = xy' + \psi(y').$$

Potem je vedno ena rešitev

$$y = Cx + \psi(C),$$

ki geometrijsko predstavlja šop premic, za drugo rešitev pa je potrebno rešiti

$$x + \psi'(C) = 0.$$

1. Poišči rešitev Clairautove diferencialne enačbe

   (a) $y = xy' - 4(y')^3$,

   (b) $y = xy' + \frac{1}{4y'}$.

Lagrangeova diferencialna enačba

Lagrangeova diferencialna enačba je oblike

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Ko je $\psi(y') = y'$ dobimo Clairotovo diferencialno enačbo, zato naj bo $\psi(y') \neq y'$. Rešujemo parametrično tako, da je

$$y' = t.$$

Tako dobimo

$$y = x\varphi(t) + \psi(t)$$

in to obliko odvajamo po t. Med drugim upoštevamo, da je $y' = x't$ in rešujemo enačbo

$$x't = x'\varphi(t) + x\varphi'(t) + \psi'(t).$$

1. Poišči rešitev Lagrangeove diferencialne enačbe
   (a) $2y = xy' + (y')^3$,
   (b) $x(y')^3 - (yy')^2 + 1 = 0$.

Linearne diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

Linearna diferencialna enačba višjega reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x),$$

kjer so $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ realna števila. Homogeni del te diferencialne enačbe je

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

in rešitve iščemo s pomočjo $y = e^{\lambda x}$, kjer je λ neznani koeficient

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_2\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Iz tega dobimo polinom t.i. karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Ničle karakterističnega polinoma nam bodo dale rešitve diferencialne enačbe. Poglejmo si za $n = 2$. V tem primeru imamo dve ničli.

1. Ničli λ_1, λ_2 sta realni in različni.

$$y_H = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

2. λ je dvojna realna ničla.

$$y_H = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$$

3. Ničli λ_1, λ_2 sta konjugirani kompleksni par. Recimo, da $\lambda_1 = a + bi$ in $\lambda_2 = a - bi$. Potem

$$y_H = e^{ax}\left(C_1e^{ibx} + C_2e^{-ibx}\right)$$

   Med drugim se izkaže, da je

$$C_1e^{ibx} + C_2e^{-ibx} = D_1\cos(bx) + D_2\sin(bx)$$

   in tako

$$y_H = e^{ax}\left(D_1\cos(bx) + D_2\sin(bx)\right).$$

   Tako sta $e^{ax}\cos(bx)$ in $e^{ax}\sin(bx)$ partikularni rešitvi.

Podobno lahko razmišljamo za višji red. Kompleksne rešitve bodo vedno nastopale v konjugiranih parih. Za partikularno rešitev imamo naslednje možnosti

(a) Uganemo.

(b) Variacija konstant. Če imamo diferencialno enačbo drugega reda rešujemo sistem

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

(c) Nastavki za partukularno rešitev v odvisnosti od f:

(i) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α ni ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x},$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(ii) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α k-kratna ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k,$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(iii) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ ni ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x)),$$

kjer sta $Q_m(x), R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje največ $m = \max\{m1, m2\}$.

(iv) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ je k-kratna ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))x^k,$$

kjer sta $Q_m(x), R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje največ $m = \max\{m1, m2\}$.

Vse te nastavke lahko še kombiniramo (npr. s funkcijami cos, sin, ipd.).

1. Poišči splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $y'' = 0$,

(b) $y'' - y' - 2y = 0$,

(c) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

(d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$,

2. Poišči splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $y'' + 4y' + 3y = x - 1$,

   (b) $y'' - 6y' + 9y = 2xe^{3x}$,

   (c) $y'' + 9y = \sin 3x - e^x \cos 2x$,

   (d) $y^{(4)} + y''' - y'' - y' = 4e^x$,

   (e) $y^{(5)} + y''' + 1 = x^2$.

   (f) $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = xe^x$
   Nima ničel; $y_p = (Ax + B)e^x$.
   $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$
   Ima ničle; $y_p = (Ax + B)e^x x^2$

   (g) $y''' - 4y'' + 5y' = 1 - x$
   Nima ničel; $0, 2 - i, 2 + i$;

   (h) $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = e^x \sin(2x)$
   Ima ničle; $1, 1 - 2i, 1 + 2i$; $y_p = e^x(A \cos(2x) + B \sin(2x))$.

   (i) $y''' + 3y'' + 4y' + 12y = x \sin(2x)$ Ima ničle; $-3, -2i, 2i$; $y_p = (Ax + B) \cos(2x) + (Cx + D) \sin(2x)$.

3. Poišči rešitve naslednjih diferencialnih enačb pri pogojih:

   (a) $y'' + 2y' + 5y = 17 \sin(2x)$,

   (b) $y'' - y' - 2y = 3x$, $y(0) = y'(0) = 1$,

   (c) $y'' + 9y = \sin 3x - e^x \cos 2x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{7}{26} e^{\frac{3\pi}{2}}$,

   (d) $y'''' + y'' = 7x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{2}$, $y'''(\frac{\pi}{2}) = 8$.

Reševanje linearnih diferencialnih enačb s potenčnimi vrstami

1. Linearno diferencialno enačbo drugega reda

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

reši z vrsto (za rešitev uporabi nastavek $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$).