UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA KEMIJO IN KEMIJSKO TEHNOLOGIJO

Petra Žigert

Matematika za študente

VS programa

Maribor 2009

 Prva izdaja september 2008, druga izdaja september 2009.

Petra Žigert, Matematika za študente VS programa

Recenzenti: izr. prof. dr. Brane Butinar

doc. dr. Matej Mencinger

doc. dr. Dominik Benkovič

Avtorica: doc. dr. Petra Žigert

Vrsta učbenika: skripta

Tisk: Založniško-tiskarska dejavnost Tehniških fakultet Univerze v Mariboru

Naklada: 150 izvodov

CIP-Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)

ŽIGERT, Petra
Matematika za študente VS programa / Petra Žigert.- Maribor: Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, 2008

ISBN 978-961-248-120-9

COBISS.SI-ID 61462017

Kazalo

Predgovor

Matematika je dokazovanje najbolj očitnih stvari na najmanj očiten način.

George Polya

Skripta je v prvi meri namenjena študentom visokošolsko strokovnega programa na Fakulteti za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Mariboru. Napisana je v duhu bolonjskega programa, ki bo(je) zaživel s šolskim letom 2009/10 in zajema vsebine predmetov Matematika 1 in Matematika 2 (oziroma Matematike 1 po starem programu). Seveda lahko posežejo po njej tudi študenti drugih, predvsem tehniško usmerjenih fakultet.

Pri pripravi skripte sem težila k temu, da čimbolj poenostavim predpisane vsebine, a kljub temu ohranim matematično korektnost. Ker je skripta namenjena bodočim inženirjem, so zahtevnejši dokazi izpuščeni, sami izreki ali trditve pa ilustrirane na primerih. Pri pripravi skripte sem si pomagala z zapiski predavanj profesorjev Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, ki so nekoč predavali tudi meni, pri čemer bi izpostavila dr. Mateja Brešarja in dr. Uroša Milutinovića. Poleg tega sem pri pripravi vsebin uporabljala na koncu navedeno literaturo.

Na fakulteto se vpisujete študenti z zelo različnim predznanjem, kar je še posebej očitno ravno pri matematiki. V skripti pozornost ni namenjena nekaterim osnovnim algebrajskim prijemom, kot sta na primer računanje z ulomki in reševanje enačb, so pa to osnove, brez katerih ne morete delati. Predpostavlja se, da to znanje prinesete s seboj iz srednji šol. Žal izkušnje kažejo, da temu ni tako. Ravno zato je skripta lahko le v pomoč pri študiju in ne more nadomestiti prisotnosti na predavanjih in vajah, kjer področjem, s katerimi imate težave, namenimo več pozornosti v okviru časa, ki nam je na razpolago. Gradivo pred vami zajema vse, kar se na področju matematike na visokošolsko strokovnem programu naše fakulete pričakuje, da bo študent znal. Na koncu vsakega poglavja so naloge, ki pa so brez rešitev. Te in podobne naloge se rešujejo na vajah.

Želim si, da bi bila skripta korak k temu, da študenti izgubite strah pred matematiko in se lotite dela z več optimizma, veselja in upam, da se bo v vas prebudilo nekaj matematične radovednosti. Dela je veliko, ampak na tem mestu apeliram na vas, da je s sprotnim delom vse lažje.

izr. prof. dr. Petra Žigert

Poglavje 1

Uvodno poglavje

V uvodnem poglavju bomo spoznali osnovne simbole logike, ki jih bomo vseskozi potrebovali pri zapisovanju matematičnih pojmov. Seznanili se bomo z množicami in se osredotočili na številske množice. Posebna pozornost bo namenjena množici realnih števil.

1.1 Logika

Zelo poenostavljeno bi lahko povedali, da je logika veda, ki proučuje načela pravilnega mišljenja.

Osredotočili se bomo na izjave in njihovo povezovanje s tako imenovanimi izjavnimi povezavami oziroma logičnimi operatorji. *Izjava* je trditev, ki ima le eno lastnost in sicer je bodisi resnična bodisi neresnična. Izjava, ki je sestavljena iz ene same trditve, je *enostavna izjava*, v nasprotnem govorimo o *sestavljeni izjavi*. Enostavne izjave, ki jih običajno označujemo z malimi tiskanimi črkami $p, q, r, \dots$, z *izjavnimi povezavami* povežemo v sestavljene izjave, ki jih označujemo z velikimi tiskanimi črkami $A, B, C, \dots$. Če je izjava p resnična, pravimo, da ima *logično vrednost* 1 in pišemo $p \equiv 1$, sicer je neresnična in ima logično vrednost 0 in pišemo $p \equiv 0$.

Primer 1.1. *Preverimo logično vrednost enostavnih izjav p in q:*

p...15 je liho število,

q...15 je praštevilo.

Izjava p je resnična in ima logično vrednost 1 ($p \equiv 1$), izjava q je neresnična in ima logično vrednost 0 ($q \equiv 0$),.

Navedimo najpogostejše izjavne povezave, ki povezujejo dve enostavni izjavi v sestavljeno izjavo. Poleg teh, bomo omenili še eno posebno izjavno povezavo in sicer je to negacija, ki deluje samo na eni enostavni izjavi.

(i) **Negacija** $\neg$

$\neg p$ ...ne p oz. ni res, da p

Izjava $\neg p$ je resnična, natanko tedaj, ko je p neresnična izjava:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Primer 1.2. *Negirajmo izjavo p iz Primera 1.1 in določi njeno logično vrednost.*

$A = \neg p$...15 ni liho število ($A \equiv 0$.)

(ii) **Disjunkcija** $\vee$

$p \vee q$ ...p ali q

Sestavljena izjava $p \vee q$ je resnična, ko je resnična vsaj ena od izjav p ali q:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Primer 1.3. *Poiščimo disjunkcijo izjav iz Primera 1.1 in določi njeno logično vrednost.*

$A = p \vee q$...15 je liho število ali praštevilo ($A \equiv 1$.)

(iii) **Konjunkcija** $\wedge$

$p \wedge q$ ...p in q

Sestavljena izjava $p \wedge q$ je resnična natanko tedaj, ko sta resnični obe izjavi p in q:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Primer 1.4. *Poiščimo konjukcijo izjav iz Primera 1.1 in določi njeno logično vrednost.*

$A = p \wedge q$...15 je liho število in hkrati praštevilo ($A \equiv 0$.)

(iv) **Implikacija** $\Rightarrow$

$p \Rightarrow q$ ...iz p sledi q (če p potem q)

Sestavljena izjava $p \Rightarrow q$ je neresnična natanko tedaj, ko iz resnične izjave p sledi neresnična izjava q. V vseh ostalih primerih je ta izjava resnična:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primer 1.5. *Poiščimo obe implikaciji izjav iz Primera 1.1 in določi njuni logični vrednosti.*

$A = q \Rightarrow p$...če je 15 praštevilo, potem je 15 liho število ($A \equiv 1$.)
$B = p \Rightarrow q$...če je 15 liho število, potem je 15 praštevilo ($B \equiv 0$.)

(iv) **Ekvivalenca** $\Leftrightarrow$

$p \Leftrightarrow q$ ... p je ekvivalentno q (p natanko tedaj kot q)

Sestavljena izjava $p \Leftrightarrow q$ je resnična natanko tedaj, ko sta p in q obe resnični ali pa obe neresnični:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Primer 1.6. *Poiščimo ekvivalenco izjav iz Primera 1.1 in določi njeno logično vrednost.*

$A = p \Leftrightarrow q$... 15 je liho število natanko tedaj, ko je 15 praštevilo ($A \equiv 0$.)

Vrstni red delovanja izjavnih povezav določimo z oklepaji in upoštevanjem prioritete izjavnih povezav, ki je sledeča (od najmočnejše do najšibkejše):

$$\begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

Na primer, v sestavljeni izjavi $(\neg p) \vee q$ je oklepaj odvečen in jo lahko pišemo kot $\neg p \vee q$.

Pravimo, da sta izjavi A in B *enakovredni*, $A \approx B$, ko imata enako logično vrednost za vsak nabor enostavnih izjav, ki vstopajo vanju.

Omenimo, da so disjunkcija, konjunkcija in ekvivalenca komutativne in asociativne izjavne povezave, medtem ko implikacija teh lastnosti nima:

$$\begin{array}{cc} \text{komutativnost} & \text{asociativnost} \\ p \vee q \approx q \vee p, & (p \vee q) \vee r \approx p \vee (q \vee r), \\ p \wedge q \approx q \wedge p, & (p \wedge q) \wedge r \approx p \wedge (q \wedge r), \\ p \Leftrightarrow q \approx q \Leftrightarrow p, & (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \approx p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)\,. \end{array}$$

Primer 1.7. *Podajmo primer enakovrednih sestavljenih izjav.*

S tabelo logičnih vrednosti oziroma pravilnostno tabelo se lahko prepričamo, da sta naslednji sestavljeni izjavi enakovredni:

$$p \Rightarrow q \approx (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\,.$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1 .

Naštejmo še nekatere pomembnejše enakovredne izjave:

$$p \Rightarrow q \approx \neg p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \approx \neg p \Leftrightarrow \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \approx \neg p \vee \neg q \quad \text{... De'Morganov zakon}$$

$$\neg(p \vee q) \approx \neg p \wedge \neg q \quad \text{... De'Morganov zakon}$$

$$p \vee (q \wedge r) \approx (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{... distributivnost}$$

$$p \wedge (q \vee r) \approx (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{... distributivnost}$$

Primer 1.8. *Preverimo enkovrednost naslednjih izjav.*

1. $p \Rightarrow q \approx \neg q \Rightarrow \neg p$:

   Enakovrednost lahko preverimo s pravilnostno tabelo:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1 .

   Lahko pa tudi z uporabo enakovrednih izjav:

   $$p \Rightarrow q \approx \neg p \vee q \approx q \vee \neg p \approx \neg q \Rightarrow \neg p\,.$$

2. $\neg(p \Rightarrow q) \approx p \wedge \neg q$:

   Na podoben način s pomočjo pravilnostne tabele lahko bralec sam preveri drugi primer, mi pa bomo uporabili enakovredne izjave:

   $$\neg(p \Rightarrow q) \approx \neg(\neg p \vee q) \approx \neg(\neg p) \wedge \neg q \approx p \wedge \neg q\,.$$

Primer 1.9. *Zanikajmo izjavo:*

Če sem fant, tedaj rad gledam nogomet.

Zanikana izjava je:
"Sem fant in ne gledam rad nogometa."
Pri tem je enostavna izjava p... sem fant in druga enostavna izjava je q... rad gledam nogomet. Sestavljena izjava je $p \Rightarrow q$, katere negacija je $p \wedge \neg q$.

Pri zapisovanju izjav se pojavljata dva kvantifikatorja:

univerzalni kvantifikator: $\forall$ ... beremo "za vsak" in

eksistenčni kvantifikator: $\exists$ ... beremo "obstaja".

Če ima nek x lastnost P, pišemo $P(x)$. Izjavi, da ima vsak x lastnost P oz. da obstaja x z lastnostjo P zanikamo kot:

$$\neg\forall x : P(x) \approx \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg\exists x : P(x) \approx \wedge x : \neg P(x)$$

Primer 1.10. *Zanikajmo izjavi:*

1. *Vsak labod je bel.*

   Zanikana izjava je:

   "Obstaja labod, ki ni bel."

   Pri tem je lastnost $P(x)$... labod je bel in izjava je $\forall x : P(x)$, njena negacija pa je $\exists x : \neg P(x)$.

2. *Nekateri ljudje so višji od 2 m.*

   Na podoben način kot v prvem primeru pridemo do zanikane izjave:

   "Vsi ljudje so nižji od 2 m."

1.2 Množice

Pogledali si bomo zapisovanje in podajanje množic ter računske operacije z njimi.

Množica je skupina nekih elementov. Označujemo jih z veliki tiskanimi črkami $A, B, ..., M, ...$. Množica je določena, ko lahko za vsak element določimo ali pripada množico ali ne. Če element a pripada množici M, to zapišemo

$$a \in M\,.$$

V nasprotnem primeru, če nek element b ne pripada množici M, to zapišemo

$$b \notin M\,.$$

Množice najpogosteje podajamo na enega od naslednjih dveh načinov.

i) V zavitih oklepajih naštejemo vse elemente množice, če je množica končna, in naštejemo le nekaj elementov, če je neskončna, npr.:

$$A = \{-1, 0, 1\} \quad \text{oziroma} \quad B = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}\,.$$

ii) V zavitem oklepaju zapišemo skupno lastnost $P(x)$ elementov množice, npr.:

$$A = \{x;\, P(x)\} = \{x;\, x^2 - x = 0\}\,.$$

Primer 1.11. *Poiščimo elemente množic A in B.*

1. *Naj množica A vsebuje vse tiste x za katere velja, da je x praštevilo.*

   $$A = \{x; x \,\text{je praštevilo}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, ...\}\,.$$

2. *Naj imajo elementi množice B lastnost $P(x)$ ki pove, da je x večkratnik števila 3 v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.*

   $$B = \{x;\, P(x)\} = \{x;\, x = 3\,k \wedge k \in \mathbb{N}\} = \{3\,k;\, k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}\,.$$

Množica M je *prazna*, ko ne vsebuje nobenega elementa. Prazno množico zapišemo $\emptyset$ ali tudi $\{\,\}$.

Množica A je *podmnožica* množice B, $A \subseteq B$, če je vsak element množice A obenem tudi element množice B.

Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, ko je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Neenakost množic A in B zapišemo $A \neq B$.

A je *prava podmnožica* množice B, $A \subset B$, če je $A \subseteq B$ in je $A \neq B$.

Moč množice A, $|A|$, je število njenih elementov.

Primer 1.12. *Poiščimo odnos med množicama A in B.*

1. *Naj bo A množica celih števil in B množica sodih števil.*

   Tedaj je $B \subset A$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R};\, x > 0 \wedge x < 0\}$, $B = \emptyset$.

   Tedaj je $A = B$.

Operacije z množicami

(i) **Presek** množic A in B, $A \cap B$, je množica vseh tistih elementov, ki so hkrati v A in v B:

$$A \cap B = \{x;\, x \in A \wedge x \in B\}\,.$$

Če je $A \cap B = \emptyset$ pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*.

(ii) **Unija** množic A in B, $A \cup B$, je množica vseh tistih elementov, ki so vsaj v eni od množic A ali B:

$$A \cup B = \{x;\, x \in A \vee x \in B\}\,.$$

(iii) **Razlika** množic A in B, $A \setminus B$, je množica vseh tistih elementov, ki so v A in niso v B:

$$A \setminus B = \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}\,.$$

Primer 1.13. *Naj bo* $A = \{a, b, c, d\}$ *in* $B = \{b, c, e\}$.

1. *Poiščimo presek množic* A *in* B.

   $A \cap B = \{b, c\}\,.$
2. *Poiščimo unijo množic* A *in* B.

   $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}\,.$
3. *Poiščimo razliko množic* A *in* B.

   $A \setminus B = \{a, d\}\,.$

Ker velja

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{in} \quad A \cup B = B \cup A$$

pravimo, da sta operaciji preseka in unije *komutativni*, medtem ko ta lastnost ne velja za razliko množic. Ker velja tudi

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{in} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

pravimo, da sta operaciji unije in preseka *asociativni*, medtem ko ta lastnost ponovno ne velja za razliko množic.

(iv) **Kartezični produkt množic** A **in** B, $A \times B$, je množica vseh urejenih parov (a, b), kjer je $a \in A$ in $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b);\, a \in A \wedge b \in B\}\,.$$

Opomba.

$$\begin{array}{ccccl} \{a, b\} & = & \{b, a\} & \ldots & \text{množica} \\[1em] (a, b) & \neq & (b, a) & \ldots & \text{urejeni par} \end{array}$$

Primer 1.14. *Poiščimo oba kartezična produkta množic* $A = \{1, 2, 3\}$ *in* $B = \{a, b\}$.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, a), (3, a)\} \\[1em] B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \end{aligned}$$

Ker $A \times B \neq B \times A$ vidimo, da kartezični produkt ni komutativna operacija.

Kot pomembnejša primera kartezičnega produkta omenimo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, ki je celoštevilska mreža in $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, ki je ravnina. Več o posameznih faktorjih obeh kartezičnih produktov bomo izvedeli v naslednjih razdelkih tega poglavja.

1.3 Številske množice in matematična indukcija

V tem razdelku bomo obnovili znanje o številskih množicah, pri čemer se bomo osredotočili na matematično indukcijo, ki je pogosto uporabljena metoda dokazovanja v matematiki.

Številske množice

(i) V množici *naravnih števil* $\mathbb{N}$ so števila $\{1, 2, 3, ...\}$. Če naravnim številom dodamo število 0, dobimo množico $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$.

(ii) Množico *celih števil* $\mathbb{Z}$ sestavljajo naravna števila, število 0 in nasprotne vrednosti naravnih števil -1,-2,-3,...

(iii) *Racionalna števila* so števila, ki jih lahko zapišemo v obliki ulomka $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b iz $\mathbb{Z}$ in je $b \neq 0$:

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{8}, -\frac{35}{99}, ...$$

Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta enaka, ko je $ad = bc$. Množico racionalnih števil označimo $\mathbb{Q}$.

(iv) Čeprav bomo omejenost množice spoznali kasneje, omenimo, da podmnožice množice $\mathbb{Q}$ nimajo vedno natančne spodnje in zgornje meje.

Na primer, množica $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ ima zgornje meje $\frac{14}{10}, \frac{141}{100}, ...$, vendar je njena natančna zgornja meja število $\sqrt{2}$, ki ga ni mogoče zapisati z ulomkom. Takih števil je v bistvu še več kot ulomkov in jih imenujemo *iracionalna števila*. Če iracionalna števila dodamo množici racionalnih števil, dobimo *realna števila* $\mathbb{R}$. O realnih številih bomo več spoznali v nadaljevanju.

Med naštetimi množicami velja zveza:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Matematična indukcija

Matematična indukcija je način dokazovanja, ko želimo neko lastnost P dokazati za vsa naravna števila n in sicer to naredimo v dveh korakih:

(i) dokažemo, da P velja za $n = 1$ (baza indukcije),

(ii) predpostavimo, da lastnost P velja za število $n - 1$ in od tod izpeljemo, da lastnost P velja tudi za število n.

Primer 1.15. *Z matematično indukcijo dokažimo identiteto:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Najprej pokažemo identiteto za $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}\,.$$

V drugem delu predpostavimo, da identiteta velja za $n-1$ in jo dokazujemo za n:

$$(1 + 2 + ... + (n-1)) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Primer 1.16. *Poišči in dokaži formulo za število diagonal v konveksnem večkotniku (diagonala je daljica, ki povezuje nesosednji oglišči večkotnika).*

Število diagonal D_n v konveksnem večkotniku, $n \geq 3$, je enako

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}\,.$$

Najprej pokažemo formulo za $n = 3$:

$$D_3 = 2 = \frac{3(3-3)}{2} = 0\,.$$

Ker trikotnik nima nobene diagonale, smo trditev pokazali za bazo indukcije.
V drugem delu predpostavimo, da identiteta velja za $n-1$ in jo dokazujemo za n:

$$D_n = D_{n-1} + (n-3) + 1 = \frac{(n-1)((n-1)-3)}{2} + n - 2 = \frac{n(n-3)}{2}\,.$$

1.4 Realna števila

Pokazali bomo lastnosti realnih števil in poimenovali strukturo, ki jo tvori množica realnih števil.

Obseg realnih števil

Definicija 1.17. Binarna operacija $\circ$ *je predpis, ki deluje iz množice $A \times A$ v množico A:*

$$\circ : A \times A \to A\,.$$

To pomeni, da poljubnemu urejenemu paru (x, y) iz kartezičnega produkta $A \times A$ priredimo element $z = x \circ y$, ki pripada množici A:

$$(x, y) \in A \times A \mapsto z = x \circ y \in A\,.$$

Primer 1.18. *Ali sta seštevanje sodih in lihih števil binarni operaciji?*

Seštevanje sodih števil je binarna operacija, saj je vsota dveh sodih števil ponovno sodo število, medtem ko to ne velja za seštevanje lihih števil.

Definicija 1.19. *Na množici $\mathbb{R}$ definiramo dve binarni operaciji, ki delujeta iz $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

(i) seštevanje: $(a, b) \mapsto a + b$,

(ii) množenje: $(a, b) \mapsto ab$.

Lastnosti seštevanja:

I. komutativnost

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ a + b = b + a\,,$$

II. asociativnost

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}:\ (a + b) + c = a + (b + c)\,,$$

III. enota ali nevtralni element 0

$$\exists\, 0 \in \mathbb{R}, \forall\, a \in \mathbb{R}:\ a + 0 = a\,,$$

IV. nasprotno število $-a$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0\,.$$

Lastnosti množenja:

V. komutativnost

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ ab = ba\,,$$

VI. asociativnost

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}:\ (ab)c = a(bc)\,,$$

VII. enota 1

$$\exists\, 1\ \in \mathbb{R}, \forall\, a \in \mathbb{R}:\ a \cdot 1 = a\,,$$

VIII. obratno število $\frac{1}{a}$

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists\, \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a\frac{1}{a} = 1\,.$$

Opazimo, da za obe operacijo veljajo podobne lastnosti. Poleg teh velja še naslednja lastnost, ki povezuje obe operaciji.

IX. distributivnost

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \; a(b+c) = ab + ac\,,$$

Lastnosti od I. do IX. so značilne za matematično strukturo, ki jih imenujemo *obseg*, zato je množica realnih števil *obseg realnih števil.* Ker je to množica števil, je $\mathbb{R}$ *številski obseg.*

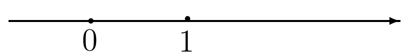
Odštevanje in deljenje nista novi računski operaciji, temveč velja:

$$a + (-b) = a - b \quad \ldots \quad \text{odštevanje}\,,$$

$$a\tfrac{1}{b} = \tfrac{a}{b} \quad \ldots \quad \text{deljenje}\,.$$

Številska os

Realna števila lahko identificiramo s točkami na premici, ki ji rečemo *realna os.* Na premici izberemo točko, ki ji rečemo izhodišče in je slika števila 0, in točko, ki je slika števila 1, kot je to razvidno s Slike 1.1. Potem vsakemu realnemu številu ustreza natanko določena točka na premici in obratno, vsaki točki lahko priredimo natanko določeno realno število. Zato običajno identificiramo izraza realno število in točka na realni osi.



Slika 1.1: Realna oziroma številska os.

Množica realnih števil desno od števila 0 je množica *pozitivnih realnih števil*, levo pa množica *negativnih realnih števil.* Med poljubnima dvema številoma na realni osi je neskončno mnogo tako racionalnih kot tudi iracionalnih števil. Zato pravimo, da sta obe množici gosti v $\mathbb{R}$.

S pomočjo odštevanja lahko števila med seboj primerjamo in urejamo po velikosti. Če je $a - b$ nenegativno število, rečemo, da je število a večje od števila b ali število b je manjše od števila a, kar zapišemo $a \geq b$ ali $b \leq a$. Če je $a - b$ pozitivno število, rečemo, da je število a strogo večje od števila b ali število b je strogo manjše od števila a, kar zapišemo $a > b$ ali $b < a$.

Za poljubna realna števila a, b in c veljajo naslednje trditve.

(i) Velja natanko ena od treh možnosti:

$$(a < b) \;\vee\; (a = b) \;\vee\; (a > b)\,.$$

(ii) $(a < b \;\wedge\; a < c) \;\Rightarrow\; (a < c)$.

(iii) $(a < b) \Rightarrow (a + c < b + c), \forall\, c.$

Naštejmo nekaj pomembnejših podmnožic množice $\mathbb{R}$.

(i) Odprti interval:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}\,.$$

(ii) Zaprti interval:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}\,.$$

(iii) Polodprti interval:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\}\,,$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}\,.$$

(iv) Neskončni intervali:
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x\}\,, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \le b\}\,,$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}\,, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}\,,$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}\,.$$

Omejenost množic v $\mathbb{R}$

Definicija 1.20. *Naj bo A poljubna podmnožica v $\mathbb{R}$. Množica A je* navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da je*
$$x \le M,\ \forall x \in A\,.$$
Število M je zgornja meja *množice A. Množica A je* navzdol omejena*, če obstaja tako realno število m, da je*
$$m \le x,\ \forall x \in A\,.$$
Število m je spodnja meja *množice A. Množica je* omejena*, ko je navzdol in navzgor omejena.*

Množica lahko ima več spodnjih in/ali zgornjih mej.

Primer 1.21. *Preučimo omejenost množice $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$.*

Zgornja meja M je vsako število večje ali enako 1, spodnja meja m pa vsako število manjše ali enako 0.

Vidimo, da ima omejena množica več zgornjih in spodnjih mej. Nas bosta posebej zanimali tako imenovani natančni meji.

Definicija 1.22. *Najmanjšo zgornjo mejo M' (navzgor) omejene množice A imenujemo* natančna zgornja meja *in jo imenujemo supremum množice A:*

$$M' = \sup A \,.$$

To pomeni, da za M' velja:

(i) M' je zgornja meja množice A ($x \leq M', \forall x \in A$),

(ii) če je M^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $M' \leq M^*$.

Definicija 1.23. *Največjo spodnjo mejo m' (navzdol) omejene množice A imenujemo* natančna spodnja meja *in jo imenujemo infimum množice A:*

$$m' = \inf A \,.$$

To pomeni, da za m' velja:

(i) m' je spodnja meja množice A ($m' \leq x, \forall x \in A$),

(ii) če je m^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $m^* \leq m'$.

Primer 1.24. *Poiščimo natančni meji množice*

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} \,.$$

$M' = 1$ in $m' = 0$.

Definicija 1.25. *Če supremum M' množice A obenem pripada množici A, ga imenujemo* maksimum *množice A*

$$M' = \max A \,.$$

Če infimum m' množice A obenem pripada množici A, ga imenujemo minimum *množice A*

$$m' = \min A \,.$$

Primer 1.26. *Če obstajata, poiščimo minimum in maksimum množice*

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} \,.$$

Supremum $M' = 1$ je tudi maksimum, ker $1 \in A$, infimum $m' = 0$ pa ni minimum, ker $0 \notin A$.

Potenciranje in korenjenje

Produkt realnega števila a s samim seboj (n-krat) zapišemo s potenco

$$\underbrace{a\,a\cdots a}_{n-\text{krat}} = a^n,\; n\in\mathbb{N}\,.$$

Število a imenujemo osnova, n eksponent, a^n pa je potenca.

Za računanje s potencami veljajo naslednja pravila:

(1) $a^n\,b^n = (a\,b)^n\,,$

(2) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n,\; b\neq 0\,,$

(3) $a^n\,a^m = a^{n+m}\,,$

(4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\; a\neq 0\,, n>m\,,$

(5) $(a^n)^m = a^{n\,m}\,.$

Dokažemo jih z matematično indukcijo (razen (4), za $n\le m$). Pokažimo recimo pravilo (2):

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\; b\neq 0\,,$$

$$\begin{aligned}
n=1: \qquad \frac{a^1}{b^1} &= \left(\frac{a}{b}\right)^1\\
n-1\to n: \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)\\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)\\
&= \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}\frac{a}{b}\\
&= \frac{a^n}{b^n}\,.
\end{aligned}$$

Če postavimo

$$a^0 = 1 \quad \text{in} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,,$$

velja (4) za poljubna n in m. S tem smo definirali potenco tudi za negativne celoštevilske eksponente.

Če rečemo, da je potenca vsak izraz, ki zadošča zvezam od (1) do (5), potemtakem je lahko v potenci eksponent katerokoli celo število. Dejansko veljajo vsa pravila tudi v primeru, ko je eksponent realno število, a tega ne bomo dokazovali, več o tem lahko bralec poišče v [5].

Definicija 1.27. *Naj bo $a \geq 0$.* Koren

$$\sqrt[n]{a}$$

je tisto število b, za katerega velja

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\,.$$

Število a se imenuje radikand *in n je* korenski eksponent*.*

Zgornja definicija in zveze (1)-(5), posplošene na poljuben realni eksponent, upravičijo oznako

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\,.$$

Podobno iz

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

sledi zapis

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\,.$$

Pravila za korenjenje izpeljemo iz posplošenih pravil za računanje s potencami in so naslednja:

(1′) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}}\,b^{\frac{1}{n}} \\ &= (a\,b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a\,b} \end{aligned}$$

(2′) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Pokažemo podobno kot (1′).

(3′) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[n\,m]{a^{n+m}}$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} &= (\sqrt[n]{a})^{\frac{m}{m}}(\sqrt[m]{a})^{\frac{n}{n}} \\ &= (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{m}{m}}\,((a)^{\frac{1}{m}})^{\frac{n}{n}} \\ &= a^{\frac{m}{n\,m}}\,(a)^{\frac{n}{n\,m}} \\ &= a^{\frac{n+m}{n\,m}} = \sqrt[n\,m]{a^{n+m}} \end{aligned}$$

(4′) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,m]{a^{m-n}}$

Pokažemo podobno kot (3′).

(5′) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\,m]{a}$

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \\ &= a^{\frac{1}{n}\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\,m}} = \sqrt[n\,m]{a}\end{aligned}$$

Absolutna vrednost in napake

Definicija 1.28. Absolutna vrednost *realnega števila x, $|x|$, je definirana takole:*

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Tako na primer velja $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|-2.5| = 2.5$.

Primer 1.29. *Poiščimo elemente množice $A = \{x \in \mathbb{R}; |x-2| < 3\}$.*

Znebimo se znakov absolutne vrednosti:

$$\begin{array}{ll} x-2 \geq 0 & x-2 < 0 \\ x \geq 2 & x < 2 \\ & \\ x-2 < 3 & -x+2 < 3 \\ x < 5 & x > -1\,. \end{array}$$

Poiščemo unijo obeh množic:

$$[2\,,5) \quad \cup \quad (-1,2) \quad = \quad (-1,5)\,.$$

Primer 1.30. *Zapišimo predpis funkcije brez znakov absolutne vrednosti.*

1. $f(x) = |4x-2|$.

Funkcija f je enaka

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2 & ; \quad x \geq \dfrac{1}{2}\,, \\ -4x+2 & ; \quad x < \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

2. $g(x) = |x^2 - 2x|$.

Funkcija g je enaka

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \quad x \leq 0 \vee x \geq 2\,, \\ \\ -x^2 + 2x & ; \quad 0 < x < 2\,. \end{cases}$$

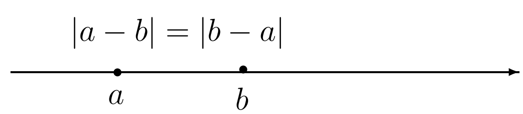
Lastnosti absolutne vrednosti:

(i) $|ab| = |a||b|\,,$

(ii) $|a + b| \leq |a| + |b|\;\;,$

(iii) $||a| - |b|| \leq |a - b|\,.$

Razdalja med točkama a in b je število $|a - b| = |b - a|$, kot to vidimo na Sliki 1.2.



Slika 1.2: Razdalja med točkama a in b.

Poglejmo napake, ki nastanejo pri merjenjih. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ prava vrednost. Zaradi napake merilnega instrumenta a nadomestimo z izmerjeno vrednostjo $\widetilde{a} \in \mathbb{R}$ (ki je mimogrede vedno iz množice $\mathbb{Q}$). Pri tem naredimo *napako* Δ:

$$\Delta = a - \widetilde{a}$$

oziroma *absolutno napako* $|\Delta|$:

$$|\Delta| = |a - \widetilde{a}|\,.$$

Želimo, da je $|\Delta|$ manjša od nekega majhnega pozitivnega števila δ (*glej Sliko 1.3*):

$$|\Delta| < \delta\,.$$

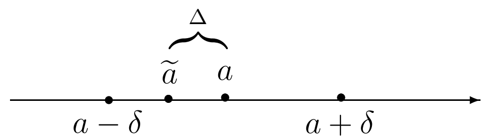
Pravimo, da smo a aproksimirali z $\widetilde{a}$ z natančnostjo δ in pišemo

$$a = \widetilde{a} + \Delta$$

ali tudi

$$a \cong \widetilde{a} \pm \delta\,.$$

Naj bosta a in b merjeni količini, preko katerih računamo c in naj bodo δ_a, δ_b, δ_c ustrezne napake ($a = \widetilde{a} \pm \delta_a$, $b = \widetilde{b} \pm \delta_b$, $c = \widetilde{c} \pm \delta_c$). Tedaj velja:



Slika 1.3: Absolutna napaka.

(i) $c = a + b \Rightarrow \delta_c = \delta_a + \delta_b$,

(ii) $c = a - b \Rightarrow \delta_c = \delta_a + \delta_b$,

(iii) $c = a\,b \Rightarrow \delta_c = |\widetilde{a}|\delta_b + |\widetilde{b}|\delta_a + \delta_a\delta_b$,

(iv) $c = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \delta_c = \dfrac{|\widetilde{a}|\delta_b + |\widetilde{b}|\delta_a}{||\widetilde{b}| - \delta_b|\,|\widetilde{b}|}$.

Izpeljimo na primer (ii) :

$$
\begin{aligned}
|\Delta_c| &= |c - \widetilde{c}| \\
&= |(a - b) - (\widetilde{a} - \widetilde{b})| \\
&= |(a - \widetilde{a}) + (\widetilde{b} - b)| \\
&\leq |a - \widetilde{a}| + |\widetilde{b} - b| \\
&= |\Delta_a| + |\Delta_b| \\
&\leq \delta_a + \delta_b\,.
\end{aligned}
$$

1.5 Kompleksna števila

Kompleksna števila bomo vpeljali na podoben način kot realna in se osredotočili na polarni zapis kompleksnega števila.

Obseg kompleksnih števil

Ker nekatere enačbe nimajo rešitve v množici realnih števil, kot na primer

$$x^2 + 4 = 0\,,$$

moramo vpeljati kompleksna števila (kot množico, v kateri je vsaka enačba rešljiva). To lahko dosežemo le v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. V ta namen definiramo na množici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naslednji operaciji.

Definicija 1.31. *Na množici* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *definiramo dve binarni operaciji, ki delujeta iz* $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*:*

(i) seštevanje $((a,b),(c,d)) \mapsto (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$*,*

(ii) množenje $((a,b),(c,d)) \mapsto (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$*.*

Lastnosti seštevanja:

I. komutativnost

$$\forall\,(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ (a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$$

II. asociativnost

$$\forall\,(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ ((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+((c,d)+(e,f))\,,$$

III. enota ali nevtralni element $(0,0)$

$$\exists\,(0,0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ (a,b)+(0,0) = (a,b)\,,$$

IV. nasprotni element $(-a,-b)$

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \exists\,(-a,-b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : (a,b)+(-a,-b) = (0,0)\,.$$

Lastnosti množenja:

V. komutativnost

$$\forall\,(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ (a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$$

VI. asociativnost

$$\forall\,(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ ((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))\,,$$

VII. enota $(1,0)$

$$\exists\,(1,0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ (a,b)\cdot(1,0) = (a,b)\,,$$

VIII. obratni element $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \exists\,(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :$$

$$(a,b)\cdot(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1,0)\,.$$

Opazimo, da za obe računski operaciji veljajo podobne lastnosti. Poleg teh velja še naslednja lastnost, ki povezuje obe operaciji.

IX. distributivnost

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}:$$
$$((a,b)\cdot((c,d))+(e,f)) = (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f))\,.$$

Zaradi lastnosti od I. do IX. je množica $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ številski obseg, ki ga imenujemo *obseg kompleksnih števil* in ga označujemo s $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{C}\,.$$

Odštevanje in deljenje v množici kompleksnih števil nista novi računski operaciji, temveč velja podobno kot v $\mathbb{R}$:

$$(a,b)-(c,d) = (a,b)+(-c,-d) \qquad \ldots \text{ odštevanje}\,,$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right) \quad \ldots \text{ deljenje}\,.$$

Številska obsega realnih števil $\mathbb{R}$ in kompleksnih števil $\mathbb{C}$ bomo krajše zapisovali $\mathcal{O}$.

Kompleksno število $(a,b)\in\mathbb{C}$ ima *realni del* a in *imaginarni del* b. Poglejmo seštevanje in množenje kompleksnih števil z imaginarnim delom 0:

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0+0) = (a+b,0)\,,$$

$$(a,0)\cdot(b,0) = (a\,b-0\cdot 0, a\,0+b\,0) = (a\,b,0)\,.$$

Opazimo, da sta v obeh primerih rezultata kompleksni števili z imaginarnim delom enakim 0, realna dela pa se obnašata kot realni števili, zato lahko privzamemo:

$$(a,0) := a\,,$$

oziroma, vsa realna števila so tudi kompleksna števila.

Naj bo $(0,1) := i$ kompleksno število, ki ga imenujemo *imaginarna enota.* Tedaj je

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

Izračunajmo še

$$b\,i = (b,0)\cdot(0,1) = (0,b)\,.$$

Zato lahko (a,b) zapišemo kot

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a+b\,i\,.$$

Namesto urejenega para (a,b) je običajnejši zapis kompleksnega števila kot vsota realnega dela in produkta imaginarnega dela z imaginarno enoto:

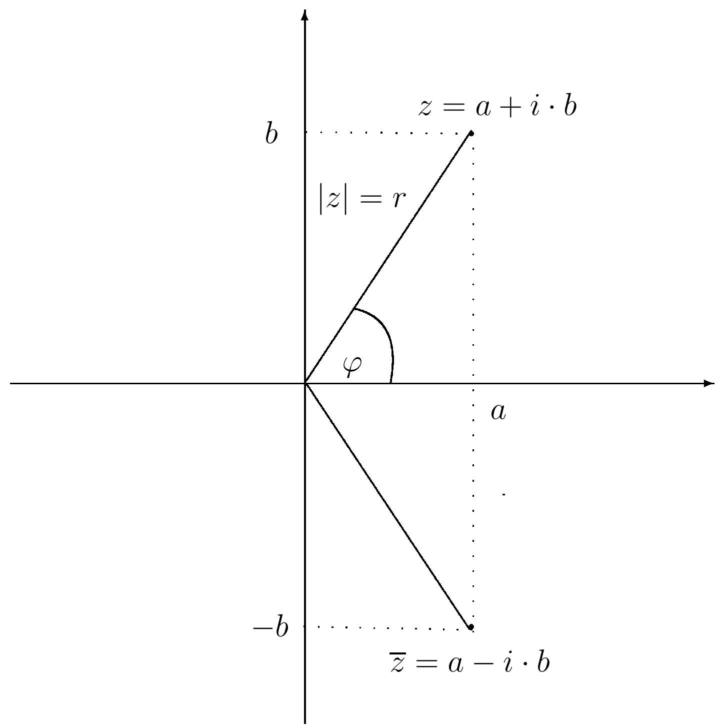
$$(a,b) = a+i\,b\,,$$

ki ga bomo uporabljali v nadaljevanju.

Naj bo $z = a + ib$. Tedaj je $\mathcal{R}e(z)$ realni in $\mathcal{I}m(z)$ imaginarni del kompleksnega števila z:

$$Re(z) = a,\ Im(z) = b\,.$$

Kompleksno število $z = a + ib = (a, b)$ lahko predstavimo v kompleksni ravnini, kjer realni del nanašamo na absciso (os x), imaginarni pa na ordinato (os y), kot to vidimo na Sliki 1.4.



Slika 1.4: Kompleksna ravnina.

Konjugirano število števila z je kompleksno število

$$\overline{z} = a - ib\,.$$

Izračunajmo njun produkt:

$$z\overline{z} = a^2 + b^2\,.$$

Absolutna vrednost števila $z = a + ib$, $|z|$, je nenegativno realno število

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}\,.$$

Izračunajmo še
$$z+\overline{z}=2a \quad \text{in} \quad z-\overline{z}=2ib\,,$$
kar pomeni, da je
$$Re(z)=\frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{in} \quad Im(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}\,.$$

Polarni zapis kompleksnega števila

Poglejmo si še *polarni zapis* kompleksnega števila. V tem primeru kompleksno število $z=a+i\,b$ opišemo s kotom φ in polmerom r. Kot φ je kot med pozitivnim delom osi x in poltrakom, na katerem leži točka (a,b), polmer r je oddaljenost točke (a,b) od koordinatnega izhodišča. Kot φ imenujemo *argument* števila z in pišemo
$$\varphi=Arg(z)\,.$$
Vsi koti $\varphi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}-\{0\}$, so prav tako argumenti števila z, vendar pišemo
$$\varphi+2k\pi=arg(z),\ k\in\mathbb{Z}-\{0\}\,.$$
Če je $Arg(z)=\varphi$, tedaj je $Arg(\overline{z})=-\varphi$.

Opazimo, da velja
$$r=|z| \quad \text{in} \quad \tan\varphi=\frac{b}{a}\,.$$
Polmer in argument natanko določata komplesno število:
$$z=a+i\,b=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,.$$
Polarni zapis za konjugirano število od z pa je oblike
$$\overline{z}=a-ib=r\cos\varphi-ir\sin\varphi=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)\,.$$

Računanje v kompleksnih številih s pomočjo polarnega zapisa je ugodno za množenje in deljenje kompleksnih števil.

(i) *Množenje*

Trditev 1.32. *Naj bo* $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ *in* $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. *Tedaj je*
$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\,.$$

Dokaz.
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$
Opomba. Pri dokazu smo uporabili enega od adicijskih izrekov, ki jih lahko najdemo v [2].

■

Trditev lahko posplošimo na produkt več kompleksnih števil.

Izrek 1.33. *(Moivre-ova formula) Naj bo* $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$*,* $k = 1, 2, ..., n$*. Tedaj je*

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)) .$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n. Za $n = 2$ smo pokazali v trditvi, indukcijski korak dokažemo podobno kot smo dokazali trditev. ∎

(ii) *Potenciranje*

Potenciranje podaja posledica Moivreove forumule.

Posledica 1.34. *Naj bo* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*. Tedaj je*

$$z^n = r^n \left(\cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)\right),\ n \in \mathbb{N} .$$

Primer 1.35. *Naj bo* $z = 1 + i$*. Izračunajmo* z^{50}*.*

Izračunati moramo polmer r in argument φ:

$$r = \sqrt{2},\ \tan\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\ (\text{I.kvadrant}) .$$

$$\begin{aligned} z^{50} &= (\sqrt{2})^{50}(\cos(50\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(50\tfrac{\pi}{4})) \\ &= 2^{25}(\cos(\tfrac{\pi}{2} + 12\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{2} + 12\pi)) \\ &= 2^{25}(0 + i) \\ &= i\,2^{25} . \end{aligned}$$

(iii) *Deljenje*

Trditev 1.36. *Obratna vrednost kompleksnega števila* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *je enaka*

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) .$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} z^{-1} = \frac{1}{z} &= \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \\ &= \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi - i\sin^2\varphi)} \\ &= \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) . \end{aligned}$$

∎

Obratna vrednost je enaka

$$z^{-1} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} .$$

Trditev 1.37. *Naj bosta* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *in* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *kompleksni števili. Tedaj je njun kvocient enak*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) .$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1\, z_2^{-1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) .
\end{aligned}$$

∎

(iv) *Korenjenje*

Zanima nas $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Spomnimo se, da je to ekvivalentno reševanju enačbe

$$u^n = z .$$

Naj bo podano kompleksno število z v polarnem zapisu:

$$z = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),\ r \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi) .$$

Nadalje, naj bo

$$u = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

in izračunajmo

$$\begin{aligned}
u^n &= \left(\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)^n \\
&= r_0\left(\cos\left(\varphi_0 + 2k\pi\right) + i\sin\left(\varphi_0 + 2k\pi\right)\right) \\
&= r_0\left(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0\right) \\
&= z .
\end{aligned}$$

Rešitve enačbe $\sqrt[n]{z} = u$, kjer je $z = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, so torej oblike

$$u_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z} .$$

V bistvu je dovolj, da k preteče vrednosti od 0 do $n-1$ (ali 1 do n), kar sledi iz lastnosti funkcij sinus in kosinus, ki ju bomo obravnavali v naslednjem poglavju.

Primer 1.38. *Poiščimo rešitve enačbe $z^3 = 1$.*

Število 1 zapišemo v polarnem zapisu $1 = 1(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))$ in ga ustrezno korenimo

$$
\begin{aligned}
z^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z &= \sqrt[3]{1} \\
&= \sqrt[3]{(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)} \\
&= \sqrt[3]{1}(1(\cos(\tfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2k\pi}{3}))\,,\ k = 0, 1, 2\,.
\end{aligned}
$$

Rešitve so

$$z_1 = 1,\ z_2 = -0.5 - 0.87i,\ z_3 = -0.5 + 0.87i\,.$$

Opomba. Opazimo, da so rešitve enačbe $z^n = a$ so oglišča pravilnega n-kotnika.

1.6 Preslikave

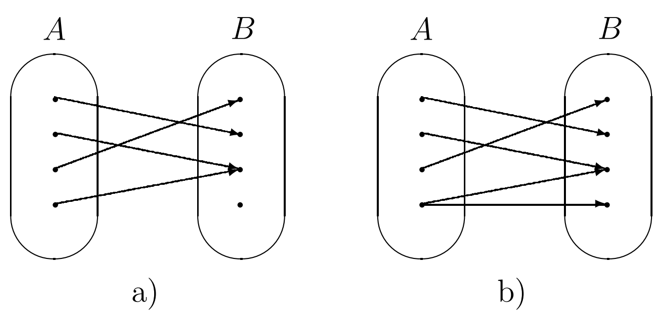
Zanimale nas bodo poljubne preslikave in njihove osnovne lastnosti.

Definicija 1.39. Preslikava *f iz množice A v množico B, $f : A \to B$, je predpis, ki elementu a iz množice A priredi natanko en element b iz množice B, kar označimo $f(a) = b$.*

Pravimo tudi, da vsakemu originalu *a iz množice A priredimo* sliko *$b = f(a)$, ki pripada množici B:*

$$a \mapsto b = f(a)\,.$$

Na Sliki 1.5 imamo pod a) primer preslikave, medtem ko pod b) ni preslikave.



Slika 1.5: a) Je preslikava, b) ni preslikava.

Preslikavo f iz A v B formalno definiramo na sledeč način:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)\,.$$

Naj bo $f : A \to B$. Potem je A *definicijsko območje* D_f ali *domena* preslikave f, B pa njena *kodomena*.

Za preslikavo uporabljamo tudi termine funkcija, upodobitev, transformacija,... Izbira ustreznega termina je odvisna od vrste domene in kodomene. V naslednjem poglavju bomo govorili o preslikavah, v katerih bosta domena in kodomena podmnožici realnih števil in v tem primeru se uporablja izraz funkcija.

Primer 1.40. *Ugotovimo, ali so s spodjimi predpisi definirane preslikave.*

1. *Naj bo* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ *in* $f : A \to B$ *podana z*

$$f(1) = b, f(2) = e, f(3) = b, f(4) = a\,.$$

   Je preslikava, saj vsakemu elementu iz A priredi natanko en element iz B.

2. *Naj bo A množica vseh ljudi na svetu, B pa množica vseh držav na svetu in $f : A \to B$ definirana tako, da je $f(a)$ država, katere državljan je oseba a.*

   Ni preslikava, ker lahko ima nekdo dvojno državljanstvo.

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n^2$.

   Je preslikava.

4. $f : A \to A$, $f(a) = a$.

   Je preslikava za poljubno neprazno množico A.

Naj bosta $f, g : A \to B$. Preslikavi f in g sta *enaki*, $f = g$, če je $f(a) = g(a)$ za vsak $a \in A$.

Primer 1.41. *Preverimo, če sta preslikavi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enaki.*

1. $f(x) = (x - 1)^3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$*:*

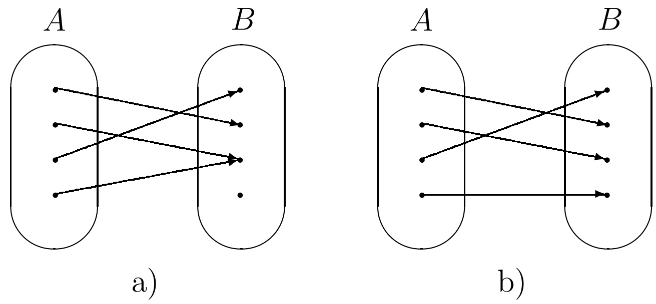
   Ker je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, sta f in g enaki preslikavi.

2. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$*:*

   Ker je $f(-5) = 5$ in $g(-5) = -5$, sta preslikavi f in g različni.

Definicija 1.42. *Preslikava $f : A \to B$ je* surjektivna*, če je vsak element iz B slika kakega elementa iz A:*

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b\,.$$



Slika 1.6: a) Ni surjektivna preslikava, b) je surjektivna preslikava.

Na Sliki 1.6 imamo pod a) primer preslikave, ki ni surjektivna, medtem ko pod b) preslikava je surjektivna.

Zaloga vrednosti preslikave $f : A \to B$, Z_f, je množica vseh tistih elementov iz B, ki so slika kakega elementa iz A:

$$Z_f = \{b \in B; \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a); a \in A\}\,.$$

Preslikava $f : A \to B$ je surjektivna natanko tedaj, ko je $Z_f = B$.

Primer 1.43. *Za predpise iz Primera 1.40 preverimo njihovo surjektivnost.*

1. Ni surjektivna.
2. Ni niti preslikava.
3. Ni surjektivna, ker $Z_f = \{3, 12, 27, ...\} \neq \mathbb{N}$.
4. Je surjektivna, ker je $Z_f = A$ in sicer takšno preslikavo imenujemo *identiteta* ali *identična preslikava*.

Definicija 1.44. *Preslikava $f : A \to B$ je* injektivna*, če se različna elementa iz A preslikata v različna elementa iz B:*

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)\,.$$

Ekvivalenten zapis bi bil

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2\,.$$

Nasprotno, torej preslikave, ki niso injektivne, dobimo z negacijo zgornje trditve

$$\exists a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)\,.$$

Na Sliki 1.6 imamo pod b) primer injektivne preslikave, medtem ko pod a) preslikava ni injektivna.

Primer 1.45. *Za predpise iz Primera 1.40 preverimo njihovo injektivnost.*

1. Ni injektivna, ker je $f(1) = f(3)$.
2. Ni niti preslikava.
3. Je injektivna.
4. Je injektivna.

Definicija 1.46. *Preslikava $f : A \to B$ je* bijektivna*, ko je injektivna in surjektivna, kar formalno zapišemo*

$$\forall a \in A, \exists!\, b \in B : f(a) = b\,.$$

Opomba. Simbol $\exists\,!$ beremo "obstaja natanko en".

Na Sliki 1.6 b) vidimo primer bijektivne preslikave.

Primer 1.47. *Za preslikave iz Primera 1.40 preverimo njihovo bijektivnost.*

Od vseh prej omenjenih je le identiteta bijektivna preslikava.

Primer 1.48. *Preverimo bijektivnost preslikav.*

1. *Naj bo* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ *in* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$.

   Tako definirana preslikava f je bijektivna.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

   Tako definirana preslikava f ni niti injektivna ($f(2) = f(-2)$) niti surjektivna (na primer -4 ni slika nobenega elementa), zato ni bijektivna.

Če obstaja kakšna bijektivna preslikava med množicama A in B, potem imata A in B enako moč.

Tako sta na primer množica naravnih števil in množica sodih števil enako močni, saj med njima obstaja bijektivna preslikava, podana s predpisom $f(n) = 2n$, ki slika iz prve v drugo množico. Pravimo, da imata obe množici števno neskončno moč.

Definicija 1.49. Kompozitum preslikav *$f : A \to B$ in $g : B \to C$ je preslikava $g \circ f : A \to C$, definirana s predpisom*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Računski operaciji pravimo komponiranje*.*

Primer 1.50. *Poiščimo kompozitum preslikav.*

1. *Naj bo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = e^{2x}$ *in* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *podana s* $g(x) = x^3 + 2x$.

   Tedaj lahko izračunamo oba kompozituma:

   $$g \circ f = (g \circ f)(x) = g(e^{2x}) = (e^{2x})^3 + 2e^{2x} = e^{6x} + 2e^{2x}$$

   $$f \circ g = (f \circ g)(x) = f(x^3 + 2x) = e^{2(x^3+2x)} = e^{2x^3+4x}\,.$$

2. *Naj bo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *podana s predpisom* $f(x) = 3x^2$ *in* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *podana s* $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

   Tedaj je definiran le kompozitum

   $$g \circ f = (g \circ f)(x)) = g(3x^2) = \ln(3x^2) + \frac{1}{3x^2}\,.$$

Opazimo, da komponiranje ni komutativna operacija:

$$f \circ g \neq g \circ f\,,$$

je pa asociativna, a tega ne bomo dokazovali

$$(f \circ g) \circ h = g \circ (f \circ h)\,.$$

Pokažimo to lastnost na primeru.

Primer 1.51. *Preverimo asociativnost komponiranja, če sta preslikavi* f *in* g *podani kot v 1. točki Primera 1.50, in je* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $h(x) = 3x$.

Vemo že, da je $(f \circ g)(x) = e^{2x^3+4x} := y(x)$, *zato je*

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (y \circ h)(x) = y(h(x)) = y(3x) = e^{2(3x)^3+12x} = e^{54x^3+12x}\,.$$

Za drugo stran izračunajmo najprej

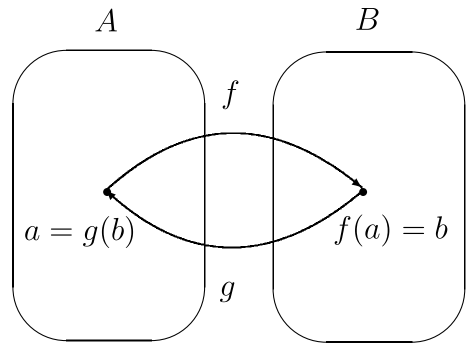
$$(g \circ h)(x) = f(h(x)) = g(3x) = (3x)^3 + 2(3x) = 27x^3 + 6x := z(x)\,.$$

Tedaj je

$$(f \circ (g \circ h)(x) = (f \circ z)(x) = f(z(x)) = e^{2(27x^3+6x)} = e^{54x^3+12x}\,.$$

Označimo z I_A identično preslikavo na množici A:

$$I_A(a) = a,\, \forall a \in A\,.$$



Slika 1.7: Obratni preslikavi f in g.

Trditev 1.52. *Naj bo $f : A \to B$ bijektivna preslikava. Potem obstaja natanko ena taka preslikava $g : B \to A$, da je*

$$g \circ f = I_A \quad \textit{in} \quad f \circ g = I_B\,.$$

Dokaz.
Definirajmo g kot:

$$\forall b \in B \text{ naj bo } g(b) \text{ tisti } a \in A, \text{ za katerega je } f(a) = b\,,$$

kot je to razvidno s Slike 1.7. Tako definirana preslikava g je bijektivna, saj je f bijektivna preslikava. Pokažimo še drugi del trditve:

$$\forall a \in A : (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a \Rightarrow g \circ f = I_A\,.$$

Podobno velja

$$\forall b \in B : (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b \Rightarrow f \circ g = I_B\,.$$

∎

Preslikavo g običajno označujemo f^{-1} in ji pravimo *inverzna preslikava* ali *obratna preslikava* preslikave f.

Opomba. Omenimo, da je f^{-1} zgolj oznaka za funkcijo, zato $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

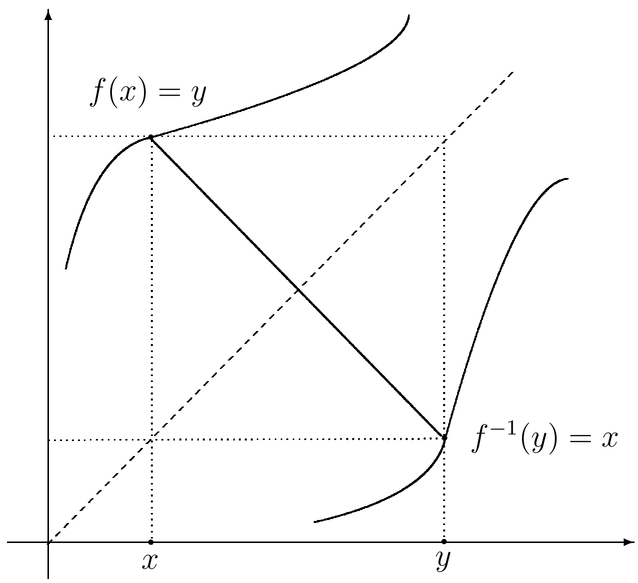
Primer 1.53. *Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ in $f : A \to B$ podana s predpisom*

$$f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c\,.$$

Če obstaja, poiščimo f^{-1}.

Preslikava f je bijektivna in zato obstaja $f^{-1} : B \to A$, ki je podana kot

$$f^{-1}(a) = 2, f^{-1}(b) = 1, f^{-1}(c) = 3\,.$$



Slika 1.8: Obratni preslikavi f in f^{-1}.

Definicija 1.54. Graf preslikave $f : A \to B$, Γ_f, *je množica vseh urejenih parov* $(a, f(a))$*:*

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)); a \in A\} \subseteq A \times B\,.$$

Na Sliki 1.8 vidimo grafa obratnih preslikav.

Primer 1.55. *Naj bo* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ *in* $f : A \to B$ *definirana kot*

$$f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c\,.$$

Poiščimo graf preslikave f*.*

Graf preslikave f je

$$\Gamma_f = \{(1, b), (2, a), (3, c)\}\,.$$

Primer 1.56. *Poiščimo graf preslikav:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$\Gamma_f = \{(x, x^2);\ x \in \mathbb{R}\}\,.$

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(a) = 2|a|$

$\Gamma_f = \{(a, 2|a|);\ a \in \mathbb{Z}\}\,.$

1.7 Naloge

Logika in množice

1. Koliko elementov imajo množice:

   a) $\{1,3,5,7\}$,
   b) $\{\{1,3,5,7\},1,3\}$,
   c) $\emptyset$,
   d) $\{\emptyset\}$.

2. Ugotovi, katere od izjav so resnične in katere neresnične:

   a) $x \in \{\{x\},\emptyset\}$,
   b) $\{x\} \in \{\{x\},\emptyset\}$,
   c) $\{\{x\},\emptyset\} \supseteq \{\{x\}\}$,
   d) $\{x\} \subseteq \{\{x\},x\}$.

3. Dani sta množici

$$A = \{3n;\, n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 6\} \quad \text{in} \quad B = \{2n+3;\, n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}\,.$$

   Poišči $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

4. Poišči potenčno množico množice $A = \{\{1\},2,a\}$.

5. Poišči kartezični produkt množic:

   a) $A = \{1,3,5\}$ in $B = \{b,c\}$,
   b) $A = \mathbb{N}$, $B = \{x;\, x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 3\}$.

6. Dani sta množici

$$A = (\,-3,2\,] \quad \text{in} \quad B = \{x \in \mathbb{R};\, 2x-3 < 5\}\,.$$

   Poišči $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$.

7. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{N};\, -4 \leq x < 2\} \quad \text{in} \quad B = \{x \in \mathbb{R};\, x^2 - 2x > 5\}\,.$$

   Poišči $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

8. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{R};\, 3x^2 + 2x - 5 \geq 0\} \quad \text{in} \quad B = \{x \in \mathbb{R};\, 3x^2 + 2 = 5\}\,.$$

   Ali je $B \subseteq A$?

1. Poišči inf, sup, ter min in max, če obstajata:
   a) $A = \mathbb{N}$,
   b) $B = \mathbb{N} \cap (-1, 3]$,
   c) $C = (-2, 4) \cup \mathbb{N}$,
   d) $D = \{1 + \frac{1}{\sqrt{n}};\ n \in \mathbb{N}\}$.

2. Dana je funkcija
$$f(x) = |-\frac{x}{2} + 4|\,.$$
   a) Načrtaj graf funkcije f in izrazi njen predpis brez absolutne vrednosti.
   b) Poišči rešitve enačbe $f(x) = 3$.
   c) Poišči rešitve enačbe $f(x) = 2x + 5$.
   d) Poišči rešitve neenačbe $f(x) < 3$.

3. Grafično in računsko reši neenačbo
$$|x + 1| < x + 3\,.$$

4. Reši neenačbo
$$|x + 2| - |x - 4| < |x + 5| + 2\,.$$

5. Reši neenačbo
$$|1 - |x - 1|| < 1\,.$$

6. Izrazi predpise funkcij brez znakov absolutne vrednosti in skiciraj njihove grafe:
   a) $f_1(x) = |\frac{x}{2} + 1|$,
   b) $f_2(x) = |-\frac{x}{2} + 1|$,
   c) $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
   d) $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

7. Dana je funkcija
$$f(x) = |x^2 - 4x|\,.$$
   a) Načrtaj graf funkcije f.
   b) Reši enačbo $f(x) = 5$.
   c) Reši neenačbo $f(x) > 5$.

8. Dana je funkcija
$$f(x) = |x^2 - 3|\,.$$

a) Načrtaj graf funkcije f.

b) Reši enačbo $f(x) = -\frac{x}{2}$.

c) Reši neenačbo $f(x) > 1$.

9. Reši neenačbo
$$|x^2 - 4| - 6 \geq x - 4\,.$$

10. Dana je funkcija
$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}\,.$$

a) Reši enačbo $|f(x)| = 4$.

b) Reši neenačbo $|f(x)| > 4$.

11. Izračunaj
$$c = \frac{2x - y}{z^2}$$
za
$$x = -1.35 \pm 0.02,\ y = 2.25 \pm 0.07,\ z = 1.19 \pm 0.14\,.$$

12. Izračunaj
$$c = \frac{x - y^2}{2z}$$
za
$$x = -1.41 \pm 0.5,\ y = 2.31 \pm 0.03,\ z = 1.85 \pm 0.1\,.$$

13. Dano je kompleksno število
$$z = \frac{2-i}{i+4}\,.$$
Poišči $\mathcal{R}e(z)$, $\mathcal{I}m(z)$, $\overline{z}$, $|z|$.

14. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo:

a) $|z - (3+4i)| = 2$,

b) $|z - (3+4i)| < 2$.

15. Reši sistem enačb:

a) $|z+1+i| = 1$, $\mathcal{R}e(z+1+i) = 0$,

b) $|(1+i)\overline{z}| = 2$, $\mathcal{R}e((1+i)\overline{z}) = 0$.

16. Izračunaj $(1+i)^{50}$.

17. Reši enačbo $z^3 + 8 = 0$.

18. Reši enačbo $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

19. Reši enačbo $z_1 + z_2 = 1 - i$, če je $Arg(z_1) = 30^\circ$ in $Arg(z_2) = -60^\circ$.

20. Reši enačbo $\mathcal{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$, če je $|z_1| = 1$, $|z_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Arg(z_1) = Arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$.

Preslikave

1. Ali množica $\{(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$ predstavlja preslikavo iz množice $\{1,2,3,4\}$ v množico $\{1,2,3,4\}$?

2. Naj bo $\mathbb{Z}_7$ množica ostankov pri deljenju s številom 7 in $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Če se da, konstruiraj preslikavo iz $\mathbb{Z}_7 \to A$, ki je:

   a) injektivna,

   b) surjektivna,

   c) bijektivna.

3. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \ n \text{ je sod} \\ 3n+1 & ; \ n \text{ je lih} \end{cases}$$

   Ali je preslikava f injektivna in ali je surjektivna?

4. Izračunaj vse možne kompozitume funkcij $f = \{(1,b),(2,a),(3,d),(4,c)\}$ in $g = \{(a,a),(b,c),(c,a),(d,c)\}$.

Poglavje 2

Realne funkcije

V tem poglavju se bomo osredotočili na realne funkcije in v zvezi s tem si bomo pogledali limito funkcije in zveznost. Kot posebni primer realnih funkcij bomo obravnavali tudi zaporedja in v povezavi z njimi še številske vrste.

2.1 Osnovne lastnosti

V zadnjem razdelku prvega poglavja so nas zanimale preslikave oziroma funkcije v splošnem, sedaj se bomo osredotočili samo na realne funkcije in njihove osnovne lastnosti.

Zanimajo nas preslikave $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere bomo uporabljali izraz funkcija

$$f(x) = y\,.$$

Pravimo, da je x *neodvisna spremenljivka* ali *argument*. Ker je domena podmnožica $\mathbb{R}$, je f funkcija realne spremenljivke. Ker je tudi kodomena podmnožica $\mathbb{R}$, je f realna funkcija. Namesto samo D lahko pišemo D_f, kadar želimo poudariti, da govorimo o funkciji f. Domene oz. (naravnega) definicijskega območja D_f funkcije f običajno ne podajamo vnaprej, temveč je to po dogovoru množica vseh tistih realnih števil, za katere je predpis funkcije f izračunljiv.

Funkcije lahko podamo na več načinov:

(i) *Tabelarično podana funkcija*

Tabelarični način podajanja je primeren predvsem za funkcije s končnim definicijskim območjem. V primeru neskončnega definicijskega območja izberemo n neodvisnih spremenljivk $x_1, x_2, ..., x_n$ in njihove funkcijske vrednosti:

nedvisne spremenljivke	x_1	x_2	...	x_n
funkcijske vrednosti	$f(x_1) = y_1$	$f(x_2) = y_2$	...	$f(x_n) = y_n$

Za izračun funkcijskih vrednosti v vmesnih točkah lahko uporabimo *linearno interpolacijo*, kar pomeni, da med točkama $T_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ in $T_i(x_i, y_i)$, $i = 2, 3, ..., n$, interpoliramo linearno funkcijo oziroma premico. Izračunajmo enačbo premice skozi T_{i-1} in T_i:

$$
\begin{aligned}
y &= kx + n \\
&\quad k = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\
&\quad n = y_i - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} x_i \\
y &= y_i + \underbrace{\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}_{\Delta y} (x - x_i)\,.
\end{aligned}
$$

Primer 2.1. *Z linearno interpolacijo izračunajmo* $\sqrt{2}$*.*

1.

x	$\ldots$	1	4	$\ldots$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\ldots$	1	2	$\ldots$

$\sqrt{2} = f(2) = 1 + \frac{2-1}{4-1}(2-1) = 1.33... = 1.\overline{3}\,.$

2.

x	$\ldots$	1.5	2.3	$\ldots$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\ldots$	1.2248	1.5166	$\ldots$

$\sqrt{2} = f(2) = 1.2248 + \frac{1.5166-1.2248}{2.3-1.5}(2-1.5) = 1.4072....$

Eksaktna vrednost je enaka $\sqrt{2} = 1.41421356... \approx 1.4142\,.$

(ii) *Eksplicitno podana funkcija*

V tem primeru je podan predpis za izračun funkcijske vrednosti $f(x)$. Na primer,

$$f(x) = \ln x$$

ali

$$g(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}\,.$$

(iii) *Implicitno podana funkcija*

Funkcije je podana implicitno z enačbo

$$g(x, y) = 0\,.$$

Funkcijska vrednost y v točki x_0 je določena z enačbo $g(x_0, y) = 0$, pri čemer mora biti y enolično določen, kar pa ni vedno res. Običajno je mogoče v okolici določene točke govoriti o enoličnem predpisu.

Primer 2.2. *Ali je s predpisom $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ določena funkcija?*

Ne, na primer za $x = 1$ je y določen z $y^2 = 1$, kar pomeni, da ni enoličen.

S primernim zožanjem domene in kodomene lahko $g(x, y) = 0$ določa funkcijo.

Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti realnih funkcij.

Definicija 2.3. *Funkcija f definirana na simetričnem intervalu $D = (-a, a)$ ali $D = [-a, a]$ je* soda*, če velja*

$$f(x) = f(-x),\ \forall x \in D$$

in liha*, če velja*

$$f(x) = -f(-x),\ \forall x \in D\,.$$

Primer 2.4. *Preverimo sodost oziroma lihost funkcije.*

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Ker je $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2$, je to soda funkcija.

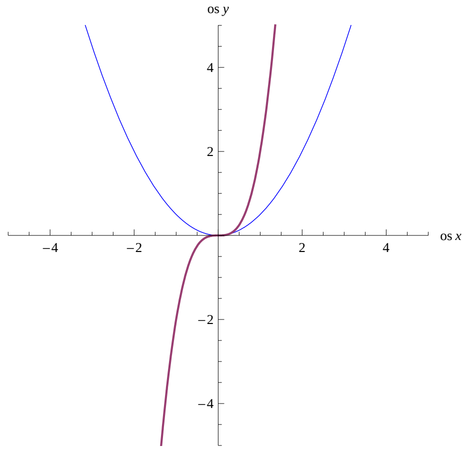
2. $f(x) = 2\,x^3$.

Ker je $f(-x) = 2\,(-x)^3 = -2\,x^3$, je to liha funkcija.

3. $f(x) = x + 2x^2$.

To ni niti soda, niti liha funkcija.

Graf sode funkcije je simetričen glede na y os, graf lihe funkcije pa je simetričen glede na koordinatno izhodišče (*glej Sliko 2.1*). Večina realnih funkcij ni niti sodih niti lihih.



Slika 2.1: Graf sode in lihe funkcije 2.4.

Definicija 2.5. *Naj bo f definirana na D in $x_1, x_2 \in D$. Tedaj je f* naraščajoča, *ko velja*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

in f je padajoča, *ko velja*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$

Če na desno strani veljajo stroge neenakosti govorimo o strogo naraščajoči *$(f(x_1) < f(x_2))$ oziroma* strogo padajoči *$(f(x_1) > f(x_2))$ funkciji. Če je f (strogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča funkcija, je f* monotona *funkcija. Če je funkcija monotona samo na neki podmnožici I definicijskega območja pravimo, da je monotona na I.*

Primer 2.6. *Preverimo monotonost funkcije.*

1. $f(x) = x^2$.

   f ni monotona funkcija, ker je za $x < 0$ padajoča, za $x > 0$ pa naraščajoča.

2. $f(x) = x^3$.

   f je monotona, ker je naraščajoča funkcija.

Definicija 2.7. *Če obstaja tako število $P \in \mathbb{R}$, da je*

$$f(x + P) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

potem je f periodična funkcija *s periodo P. Najmanjša pozitivna perioda je* osnovna perioda.

Primer 2.8. *Preverimo periodičnost funkcije.*

1. $f(x) = \sin x$.

Ker je $f(x) = f(x+2\pi) = f(x+4\pi) = f(x-2\pi)...$, je f periodična funkcija z osnovno periodo 2π.

2. $f(x) = tan\, x$.

Ker je $f(x) = f(x+\pi) = f(x+2\pi) = f(x-\pi)...$, je f periodična funkcija z osnovno periodo π.

Definicija 2.9. *Naj bosta $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$. Tedaj je naravno definicijsko območje kompozituma $f \circ g$ definirano takole*

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g;\ g(x) \in D_f\}\,.$$

Primer 2.10. *Naj bosta dani realni funkciji $f(x) = 2 - x^2$ in $g(x) = \sqrt{x}$. Poišči definicijsko območje obeh kompozitumov.*

Definicijsko območje funkcije f je $D_f = \mathbb{R}$ in funkcije g je $D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Definicijski območji kompozitumov sta

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \geq 0;\ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,, \\ D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R};\ 1 - x^2 \geq 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\,. \end{aligned}$$

Videli smo že, da za bijektivno funkcijo $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ obstaja obratna funkcija $f^{-1} : B \subseteq \mathbb{R} \to A \subseteq \mathbb{R}$ za katero velja

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x\,.$$

Na Sliki 1.8 smo videli, da sta grafa funkcij f in f^{-1} simetrična glede na simetralo lihih kvadrantov, to je premico $y = x$.

2.2 Zaporedja

Definirali bomo zaporedje, si pogledali nekaj primerov pomembnejših zaporedij in se osredotočili na nekatere lastnosti, kot sta monotonost in omejenost.

Zaporedje v množici $\mathbb{R}$ je preslikava

$$a:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,.$$

Zaradi kodomene $\mathbb{R}$ govorimo o *realnih zaporedjih*.

Po dogovoru pišemo funkcijsko vrednost $a(n) = a_n$ in jo imenujemo n-ti ali *splošni* člen zaporedja, n pa imenujemo *indeks* člena zaporedja. Namesto zapisa $a:\ \mathbb{N} \to M$ uporabljamo za zaporedje zapis $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Primer 2.11. *Poglejmo nekaj primerov zaporedij.*

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $(\frac{1}{n^2}) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$
2. $a_n = a_{n-1} + d$, *kjer sta* $a_1, d \in \mathbb{R}$ ... *aritmetično zaporedje*
3. $a_n = a_{n-1}\, q$, *kjer sta* $a_1, q \in \mathbb{R}$ ... *geometrijsko zaporedje*
4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$*...Fibonaccijevo zaporedje*
5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $(a_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

Definicija 2.12. *Naj bo* $\epsilon > 0$ *poljubno majhno število. Odprti interval* $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ *imenujemo* ϵ-okolica *točke* a.

Primer 2.13. *Od katerega* n *naprej so vsi členi zaporedja* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *znotraj* ϵ*-okolice točke 0, če je* $\epsilon = \frac{1}{10}$ *oz.* $\epsilon = \frac{1}{100}$*?*

Rešujemo neenakost

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \epsilon \\ \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| &< \epsilon \\ \frac{1}{n} &< \epsilon \\ n &> \frac{1}{\epsilon}\,. \end{aligned}$$

Za $\epsilon = \frac{1}{10}$ ležijo znotraj ϵ-okolice vsi členi od 11. naprej, za $\epsilon = \frac{1}{100}$ pa od 101. naprej.

Definicija 2.14. *Naj bo* (a_n) *realno zaporedje. Število* a *je* limita *zaporedja* (a_n), $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, *natanko tedaj, ko za vsako* ϵ*-okolico točke* a *obstaja tako naravno število* n_0*, da za vsako naravno število* $n \geq n_0$ *velja, da* a_n *leži znotraj* ϵ*-okolice točke* a*:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon\,.$$

Pišemo tudi $a_n \to a$. Če obstaja limita zaporedja pravimo, da je zaporedje *konvergentno*, sicer je zaporedje *divergentno*.

Primer 2.15. *Pokažimo, da je zaporedje* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *konvergentno.*

Členi zaporedja konvergirajo k limiti 1, kar pokažemo tako, da preverimo pogoj

$$\begin{aligned}
\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \quad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &< \epsilon \Leftrightarrow \\
\left|\frac{-1}{n+1}\right| &< \epsilon \\
\frac{1}{n+1} &< \epsilon \\
n+1 &> \frac{1}{\epsilon} \\
n &> \frac{1-\epsilon}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Tedaj je n_0 prvo naravno število večje od $\frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. Na primer, za $\epsilon = \frac{1}{20}$, bi bil $n > n_0 = 19$, kar pomeni, da vsi členi od 19. naprej ležijo znotraj ϵ-okolice limite 1.

Opazimo, če je a limita zaporedja a_n, tedaj v poljubno majhni okolici točke a ležijo vsi členi zaporedja (a_n) od nekega člena a_{n_0} naprej.

Primer 2.16. *Ali je* $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ *konvergentno zaporedje?*

Ne, ker se sodi členi bližajo k 1, lihi pa k -1.

V praksi se limita zaporedja išče predvsem z uporabo limite zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$, ki je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

in še s pomočjo nekaterih znanih limit. Poglejmo si uporabo na naslednjem primeru.

Primer 2.17. *Poiščimo limito zaporedja* $a_n = \dfrac{3n}{4+7n}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4+7n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{4}{n} + \frac{7n}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\frac{1}{n} + 7} \\
&= \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

Definicija 2.18. *Naj bo (a_n) realno zaporedje. Število s je* stekališče *zaporedja (a_n), če vsebuje vsaka poljubno majhna okolica števila s neskončno členov zaporedja (a_n).*

Če je s stekališče zaporedja (a_n), tedaj je nenakost $|a_n - s| < \epsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo indeksov n.

Opazimo, da velja

$$\text{limita} \Rightarrow \text{stekališče}\,,$$

medtem ko implikacija v obratno smer ne drži.

Primer 2.19. *Poiščimo stekališča zaporedja* $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, ...)$

Stekališči sta 1 in 0.

Izrek 2.20. *Če ima zaporedje več kot eno stekališče, je divergentno.*

Dokaz. Naj bosta s_1 in s_2 različni stekališči zaporedja (a_n). Pokažimo, da nobeno ni limita zaporedja (a_n). S tem namenom izberimo tak ϵ, da velja

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}|s_1 - s_2|\,.$$

Potem je po definiciji stekališča na vsakem od intervalov $(s_1-\epsilon, s_1+\epsilon)$ in $(s_2-\epsilon, s_2+\epsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) in noben ni na obeh intervalih hkrati. To pomeni, da nobeno od števil s_1 in s_2 ne zadošča temu, da bi v njegovi ϵ-okolici ležali vsi členi a_n od nekega n naprej in zato nobeno od števil 0 in 1 ne more biti limita. ∎

Konvergenco zaporedja je težko potrditi. Pri tem nam pomagajo nekatere lastnosti zaporedij.

(i) *Monotonost zaporedij*

Za motivacijo si poglejmo zaporedje

$$a_n = \frac{1}{n}\,.$$

Naštejmo nekaj prvih členov tega zaporedja

$$(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)\,.$$

Opazimo, da se členi zaporedja manjšajo.

Definicija 2.21. *Zaporedje* (a_n) *je* naraščajoče*, če velja*

$$a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

in je strogo naraščajoče*, če*

$$a_n < a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zaporedje (a_n) *je* padajoče*, če velja*

$$a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

in je strogo padajoče*, če*

$$a_n > a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zaporedje je monotono*, ko je (strogo) narašajoče ali (strogo) padajoče.*

Opazimo, da je to samo poseben primer monotnosti realne funkcije in v tem kontekstu nismo definirali nič novega.

Primer 2.22. *Preverimo monotonost zaporedij iz Primera 2.11.*

1. Strogo padajoče.
2. Glede na d ločimo:

$$\begin{array}{lcl} d > 0 & \Rightarrow & \text{strogo naraščajoče zaporedje,} \\ d < 0 & \Rightarrow & \text{strogo padajoče zaporedje,} \\ d = 0 & \Rightarrow & \text{konstanto zaporedje}\,. \end{array}$$

3. Glede na q ločimo:

$$\begin{array}{ccl} q > 1 & \Rightarrow & \text{strogo naraščajoče zaporedje,} \\ q = 1 & \Rightarrow & \text{konstanto zaporedje,} \\ 0 \leq q < 1 & \Rightarrow & \text{strogo padajoče zaporedje,} \\ q < 0 & \Rightarrow & \text{ni monotono}\,. \end{array}$$

4. Naraščajoče zaporedje.
5. Ni monotono zaporedje.

(ii) *Omejenost zaporedij*

Definicija 2.23. *Zaporedje* (a_n) *je* navzgor omejeno*, če* $\exists M \in \mathbb{R}$ *tak, da velja*

$$a_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

in je navzdol omejeno*, če* $\exists m \in \mathbb{R}$ *tak, da velja*

$$a_n \geq m,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zaporedje je omejeno*, ko je navzdol in navzgor omejeno.*

Opazimo, da je zaporedje (a_n) (navzgor/navzdol) omejeno, ko je množica njegovih členov $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ (navzgor/navzdol) omejena in v tem smislu ne gre za nov pojem.

Primer 2.24. *Preverimo omejenost zaporedij iz Primera 2.11.*

1. $M \geq 1, m \leq 0$.
2. Glede na d ločimo:

$$\begin{array}{lcl} d > 0 & \Rightarrow & m \leq a_1,\ M \text{ ne obstaja}, \\ d < 0 & \Rightarrow & M \geq a_1,\ m \text{ ne obstaja}, \\ d = 0 & \Rightarrow & m = M = a_n. \end{array}$$

3. Glede na q ločimo:

$$\begin{array}{ccl} q > 1 & \Rightarrow & m \leq a_1,\ M \text{ ne obstaja}, \\ q = 1 & \Rightarrow & m = M = a_1\ , \\ 0 \leq q < 1 & \Rightarrow & m = 0, M = a_1 \text{ ali } M = 0, m = a_1, \\ -1 < q < 0 & \Rightarrow & m \leq |a_1|, M \geq |a_1|. \end{array}$$

4. $m \leq F_1$, M ne obstaja.
5. $m \leq -1, M \geq \frac{1}{2}$.

Podobno kot pri omejenosti poljubne množice, sta tudi pri zaporedjih še posebej zanimivi natančni meji.

Definicija 2.25. Supremum M' *zaporedja* (a_n) *je enak*

$$M' = sup\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = sup\,(a_n)\,.$$

Infimum m' *zaporedja* (a_n) *je enak*

$$m' = inf\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = inf(a_n)\,.$$

Primer 2.26. *Poiščimo natančne meje (omejenih) zaporedij iz Primera 2.11.*

1. $M' = 1, m' = 0$.
4. $m' = F_1$, M' ne obstaja.
5. $m' = -1, M' = \frac{1}{2}$.

Izrek 2.27. *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Dokaz. Naj bo (a_n) naraščajoče in omejeno zaporedje in naj bo $M' = \sup(a_n)$. Pokazali bomo, da je $M' = \lim_{n\to\infty} a_n$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - M'| < \epsilon\,.$$

Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Tedaj število $M' - \epsilon$ ni zgornja meja zaporedja, saj sicer M' ne bi bil natančna zgornja meja. Torej obstaja člen zaporedja a_{n_ϵ} tak, da leži med $M' - \epsilon$ in M', kar pomeni, da je $a_{n_\epsilon} > M' - \epsilon$. Če postavimo indeks tega člena za n_0 v definiciji limite, to je $n_\epsilon = n_0$, potem za ta poljubno izbran ϵ velja

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon \Rightarrow |a_n - M'| < \epsilon\,,$$

saj je zaporedje (a_n) po predpostavki naraščajoče, kar pomeni, da je M' res limita zaporedja a_n.

Podobno pokažemo v primeru padajočega zaporedja (a_n), da je $m' = \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. ∎

Neposredno iz dokaza sledi naslednja posledica.

Posledica 2.28. *Naj bo (a_n) monotono zaporedje.*

(i) Če je (a_n) naraščajoče in nazvgor omejeno, tedaj (a_n) konvergira k supremumu.

(ii) Če je (a_n) padajoče in nazdol omejeno, tedaj (a_n) konvergira k infimumu.

Pomemben primer monotonega in omejenega zaporedja je zaporedje

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Naštejmo približne vrednosti nekaj členov tega zaporedja

$$a_1 = 2\,,\ a_2 = 2.25\,,\ a_3 = 2.371,\ a_4 = 2.440\,, ..., a_{100} = 2.705\,, ..., a_{1000} = 2.717\,, ...$$

Po Izreku 3.41 obstaja limita tega zaporedja in sicer je to iracionalno število, ki ga označimo z e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828...$$

Brez dokaza bomo navedli naslednji izrek, ki pove, kako računamo s konvergentnimi zaporedji.

Izrek 2.29. *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Tedaj velja*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B,$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = A\, B,$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{A}{B},\ \forall n : b_n \neq 0,\ B \neq 0\,.$

Primer 2.30. *Raziščimo zaporedje* $a_n = 2 + \frac{n}{n+1}$.

Zaporedje je naraščajoče ter omejeno z $m \leq a_1$ in $M \geq 3$. Potemtakem je to konvergetno zaporedje, katerega limita je $sup\,(a_n) = 3$.

2.3 Pregled elementarnih funkcij

Kot osnova matematične analize bomo spoznali elementarne funkcije, ki jih bomo srečevali v naslednjih poglavjih.

(i) *Polinomi in racionalne funkcije*

Definicija 2.31. Polinomi *so funkcije oblike*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

kjer je $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. *Če je* $a_n \neq 0$ *pravimo, da je polinom* p stopnje n.

Kadar želimo poudariti stopnjo polinoma pišemo p_n namesto p. Številu a_n pravimo *vodilni koeficient* polinoma, številu a_0 pa *splošni člen.*

Rešitvam polinomske enačbe

$$p(x) = 0$$

pravimo *koreni polinoma* p. Običajno namesto o korenih govorimo govorimo kar o *ničlah polinoma.* Polinom stopnje n ima natanko n ne nujno različnih ničel, ki pripadajo množici $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Ker kompleksne ničle zgornje enačbe zmeraj nastopajo v konjugiranih parih, ima polinom lihe stopnje vsaj eno realno ničlo. Naj bodo $x_1, x_2, ..., x_n$ ničle polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Tedaj lahko polinom p *faktoriziramo*, kar pomeni, da ga zapišemo kot produkt faktorjev

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) .$$

Če se faktor $(x - x_k)$ pojavi m-kat v razcepu, pravimo da je x_k m-kratna ničla polinoma f.

Korene polinoma druge stopnje

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

izračunamo po znanih formulah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Izraz pod korenom imenujemo diskriminanta in jo označujemo z $D = b^2 - 4ac$. Glede na vrednost diskriminante ločimo tri možnosti:

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R},$$

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \in \mathbb{R},$$

$$D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \overline{x_2} \in \mathbb{C}.$$

Korene polinomov višje stopnje

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,, n \geq 3$$

lahko iščemo s pomočjo *Hornerjevega algoritma*.

Uporabimo ga lahko, če poznamo vsaj eno ničlo enačbe $p(x) = 0$. Dokazati je mogoče, da če so koeficienti a_i celoštevilski in je ničla polinoma racionalno število $\dfrac{m}{n}$, tedaj m deli a_0, n pa a_n. Uporaba Hornerjevega algoritma je prikazana na Primeru 2.32.

Primer 2.32. *Poiščimo vse ničle polinoma*

$$p(x) = 5x^4 + 48x^3 - 15x^2 + 48x - 20\,.$$

Če je koren racionalno število $\dfrac{m}{n}$, tedaj $m \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ in $n \in \{1, 5\}$. Skupno imamo 12 kandidatov za koren, poleg teh pa še njihove nasprotne vrednosti. Preverimo po Hornerjevem algoritmu, da je $\frac{2}{5}$ ničla.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 5 & 48 & -15 & 48 & -20 \\
 & & 2 & 20 & 2 & 20 \\
\hline
\frac{2}{5} & 5 & 50 & 5 & 50 & 0
\end{array}$$

Torej je

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x - \frac{2}{5})(5x^3 + 50x^2 + 5x + 50) \\
&= 5(x - \frac{2}{5})(x^3 + 10x^2 + x + 10) \\
&= 5(x - \frac{2}{5})(x^2(x + 10) + (x + 10)) \\
&= 5(x - \frac{2}{5})(x + 10)(x^2 + 1) \\
&= 5(x - \frac{2}{5})(x + 10)(x + i)(x - i)\,.
\end{aligned}$$

Ničle so $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -10$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Definicija 2.33. Racionalna funkcija f *je kvocient dveh polinomov* p *in* q*:*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

Ničle ima v točkah, kjer je $p(x) = 0$. Definirana je povsod, kjer je $q(x) \neq 0$. V točkah, kjer je $q(x) = 0$, funkcija f ni definirana. Pravimo, da ima v taki točki funkcija *pol* ali *vertikalno asimpototo.* Več o tem bomo izvedeli v naslednjem poglavju.

Primer 2.34. *Poiščimo ničle, definicijsko območje in pole funkcije*

$$f(x) = \frac{5x^4 + 48x^3 - 15x^2 + 48x - 20}{x^2 - 4}\,.$$

Funkcija f ima enake ničle kot polinom iz Primera 2.32. Pola ima v $2, -2$ in definicijsko območje je zato $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

(ii) *Trigonometrične funkcije*

Definirali bomo *trigonometrične funkcije* sinus, kosinus, tangens in kotangens, in sicer najprej za kote iz intervala $[0, 2\pi]$. Pogosto uporabljamo zanje tudi termin *kotne funkcije.*

Na enotski krožnici izberemo poljubno točko $T(a, b)$ in označimo ostale točke kot je razvidno s Slike 2.2. Kot med pozitivnim delom osi x in poltrakom OT označimo z x. Tedaj je

$$|OA| = a = \cos x \quad \text{...} \quad \text{kosinus kota } x\,,$$

$$|OB| = b = \sin x \quad \text{...} \quad \text{sinus kota } x\,,$$

$$|ET''| = \tan x \quad \text{...} \quad \text{tangens kota } x\,,$$

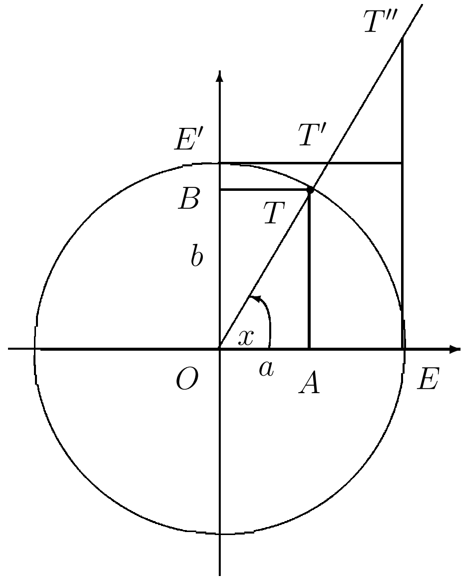
$$|E'T'| = \cot x \quad \text{...} \quad \text{kotangens kota } x\,.$$

Iz podobnosti trikotnikov OAT in OET'' je razvidno razmerje

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{|OE'|} = \tan x\,.$$

Podobno velja

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cot x}{|OE''|} = \cot x\,,$$



Slika 2.2: Definicija trigonometričnih funkcij.

kar pomeni, da je

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}\,.$$

Poglejmo predznak trigonometričnih funkcij po posameznih kvadrantih:

	$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$	$\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot x$	$+$	$-$	$+$	$-$

Kot x, merjen v radianih, predstavlja dolžino loka na enotski krožnici med točkama E in T. Kote iz stopinj v radiane pretvarjamo po naslednji zvezi:

$$x(rd) = \frac{\pi}{180^\circ} x(^\circ)$$

oziroma

$$x(^\circ) = \frac{180^\circ}{\pi} x(rd)\,.$$

Iz Slike 2.2 je razvidno, da sta funkciji sinus in kosinus periodični z osnovno periodo 2π, tangens in kotangens pa s periodo π. Torej velja

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi),$$

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi),$$

$$\tan x = \tan(x + k\pi),$$

$$\cot x = \cot(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Nadalje je s Slike 2.2 razvidno, da je kosinus soda funkcija ($\cos x = \cos(-x)$) in sinus liha funkcija ($\sin x = -\sin(-x)$), kar pomeni, da sta preostali dve prav tako lihi funkciji ($\tan x = -\tan(-x)$, $\cot x = -\cot(-x)$).

Poglejmo še nekaj najpogostejših zvez med trigonometričnimi funkcijami. Po Pitagorovem izreku velja

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 + x \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\,. \end{aligned}$$

Podobno zveza velja za kotangens

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Zapišimo še adicijska izreka

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\,, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\,. \end{aligned}$$

Od tod lahko izpeljemo

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin(x+(-y)) \\
&= \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y) \\
&= \sin x\cos y-\cos x\sin y\,, \\
\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) \\
&= \cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y) \\
&= \cos x\cos y+\sin x\sin y\,.
\end{aligned}$$

Iz adicijskih izrekov lahko izpeljemo tudi sinus in kosinus dvojnih kotov

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \sin(x+x) \\
&= \sin x\cos x+\cos x\sin x \\
&= 2\sin x\cos y\,, \\
\cos(2x) &= \cos(x+x) \\
&= \cos x\cos x-\sin x\sin x \\
&= \cos^2 x-\sin^2 x\,.
\end{aligned}$$

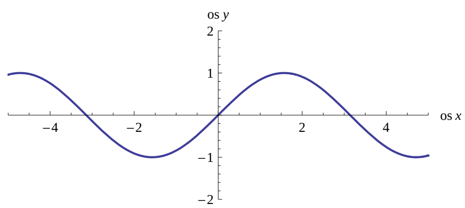
Prav tako nam adicijski izreki dajo zvezo med kotoma, katerih vsota je $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sin(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \sin\tfrac{\pi}{2}\cos x-\cos\tfrac{\pi}{2}\sin x \\
&= \cos x\,, \\
\cos(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \cos\tfrac{\pi}{2}\cos x+\sin\tfrac{\pi}{2}\sin x \\
&= \sin x\,.
\end{aligned}$$

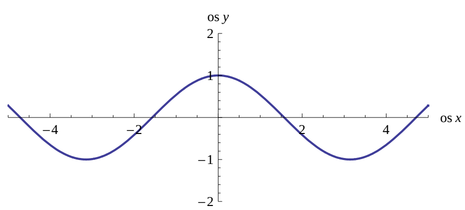
Podobno velja za dugi dve funkciji

$$\begin{aligned}
\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \cot x\,, \\
\cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\
&= \tan x\,.
\end{aligned}$$

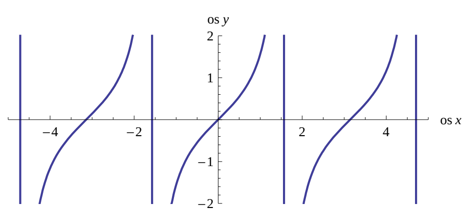
Poglejmo še grafe trigonometričnih funkcij, ki so razvidni s Slik 2.3, 2.4, 2.5, 2.6. Funkciji kosinus in sinus sta definirana na celem $\mathbb{R}$, medtem ko funkcija tangens ni definiran v ničlah kosinusa ($x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), kotangens pa ni definiran v ničlah sinusa ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



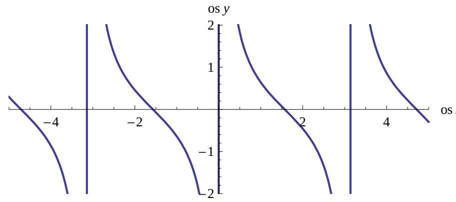
Slika 2.3: Graf funkcije sinus.



Slika 2.4: Graf funkcije kosinus.



Slika 2.5: Graf funkcije tangens.



Slika 2.6: Graf funkcije kotangens.

(iii) *Ciklometrične funkcije*

Ciklometrične funkcije so obratne funkcije od trigonometričnih. Zanje uporabljamo tudi izraz *krožne funkcije*. Ciklometrične funkcije so arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens.

Funkcija arkus sinus

Če hočemo, da bo obstajal inverz funkcije sinus, mora le-ta biti bijektivna. V ta namen moramo skrčiti definicijsko območje. Naj bo $f(x) = \sin x$ in $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Tedaj ostaja $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ taka, da je

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \; \forall x \in [-1, 1]$$

in

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \; \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Imnujemo jo *arkus sinus* in pišemo

$$f^{-1}(x) = \operatorname{asin} x.$$

Velja torej

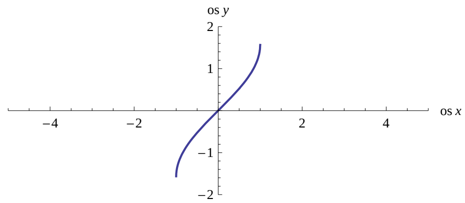
$$\sin(\operatorname{asin} x) = x, \; \forall x \in [-1, 1],$$

$$\operatorname{asin}(\sin x) = x, \; \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Definicijsko območje funkcije $f(x) = \sin x$ bi lahko tudi kako drugače skrčili. Za vsako skrčitev definicijskega območja, ki ima za rezultat bijektivno funkcijo sinus, lahko definiramo obratno funkcijo arkus sinus. Za poljubno kodomeno funkcije arkus sinus pišemo funkcijo z veliko začetnico, torej $\operatorname{Asin} x$. Kadar skrčimo območje na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, torej tako, kot smo to najprej naredili, govorimo o *glavni veji* funkcije arkus sinus in jo pišemo z malo začetnico $\operatorname{asin} x$.

Vemo že, da graf obratne funkcije dobimo z zrcaljenem preko premice $y = x$, kot je prikazano na Sliki 2.7.

Funkcija arkus kosinus



Slika 2.7: Graf glavne veje funkcije arkus sinus.

Naj bo $f(x) = \cos x$. Definicijsko območje skrčimo na $[0, \pi]$, s čimer bomo podobno kot pri funkciji arkus sinus, dobili glavno vejo funkcije arkus kosinus, ki jo zapisujemo z malo začetnico. Tedaj obstaja

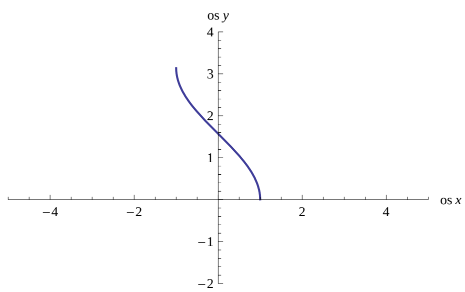
$$f^{-1} = \mathrm{acos} x : [-1, 1] \to [0, \pi]\,,$$

za katero velja

$$\cos(\mathrm{acos}\, x) = x,\ \forall x \in [-1, 1]\,,$$

$$\mathrm{acos}\,(\cos x) = x,\ \forall x \in [0, \pi]\,.$$

Na Sliki 2.8 vidimo graf glavne veje funkcije arkus kosinus.



Slika 2.8: Graf glavne veje funkcije arkus kosinus.

Izpeljimo še zvezo med obema znanima obratnima funkcijama. Naj bo $x \in [-1, 1]$. Tedaj je $y = \mathrm{asin}\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $x = \sin y$. Nadalje je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x\,,$$

kar pomeni, da je

$$\frac{\pi}{2} - y = \mathrm{acos}\, x$$

oziroma

$$\mathrm{asin}\, x + \mathrm{acos}\, x = \frac{\pi}{2}\,,\ \forall x \in [-1, 1].$$

Funkcija arkus tangens

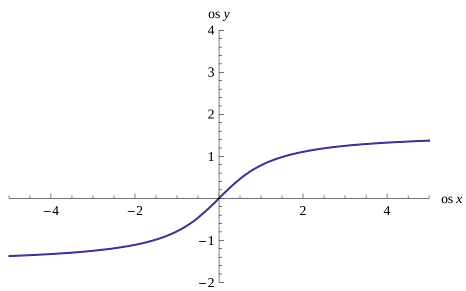
Naj bo $f(x) = \tan x$. Definicijsko območje skrčimo na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, s čimer bomo dobili glavno vejo funkcije arkus tangens Tedaj obstaja

$$f^{-1}(x) = \operatorname{atan} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

za katero velja

$$\tan(\operatorname{atan} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\operatorname{atan}(\tan x) = x,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) .$$

Na Sliki 2.9 vidimo graf glavne veje funkcije arkus tangens.



Slika 2.9: Graf glavne veje funkcije arkus tangens.

Funkcija arkus kotangens

Naj bo $f(x) = \cot x$. Definicijsko območje skrčimo na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kar nam ponovno da glavno vejo funkcije arkus kotangens. Tedaj obstaja

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ,$$

za katero velja

$$\cot(\operatorname{arcctg} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\operatorname{acot}(\cot x) = x,\ \forall [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] .$$

Na Sliki 2.10 vidimo graf glavne veje funkcije arkus kotangens.

Izpeljimo še zvezo med obema obratnima funkcijama. Naj bo $x \in \mathbb{R}$ in $y = \operatorname{atan} x$. Tedaj je in

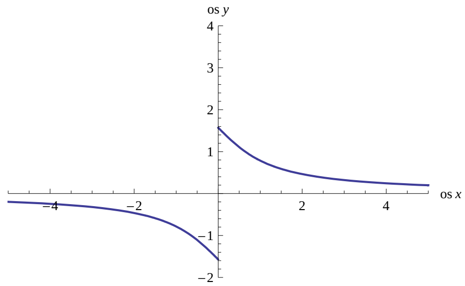
$$x = \tan y = \cot\left(\frac{\pi}{2} - y\right) .$$

Torej je

$$\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{acot} x$$

oziroma

$$\operatorname{atan} x + \operatorname{acot} x = \frac{\pi}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.10: Graf glavne veje funkcije arkus kotangens.

(iv) *Eksponentna funkcija*

Eksponentna funkcija je oblike

$$f(x) = a^x,\ a > 0\,.$$

V eksponentni funkciji nastopa neodvisna spremenljivka x v eksponentu. Ker je $1^x = 1$ za vsak x, naj bo osnova $a \neq 1$. Eksponentna funkcija je povsod definirana, torej je $D_f = \mathbb{R}$ in je povsod pozitivna, kar pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}^+$ in zato nima ničel.

Torej

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\,.$$

Za $f(x) = a^x$ velja

$$f(x + y) = f(x)\, f(y)\,,$$

saj je

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a^{x+y} \\ &= a^x\, a^y \\ &= f(x)\, f(y)\,. \end{aligned}$$

Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča funkcija, saj za vsak x_1, x_2 velja:

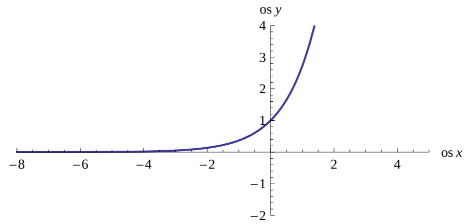
$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} \\ &\Leftrightarrow 1 < a^{x_2 - x_1}\,. \end{aligned}$$

Ker je $x_2 - x_1 > 0$ in $a > 1$ je to res za vsak $x_1 < x_2$.

Na Sliki 2.11 vidimo graf funkcije $f(x) = a^x$, za $a > 1$.

Za $a < 1$ je $f(x) = a^x$ strogo padajoča funkcija, saj za vsak x_1, x_2 velja:

$$x_1 < x_2 \;\;\Rightarrow\;\; a^{x_1} > a^{x_2}\,,$$

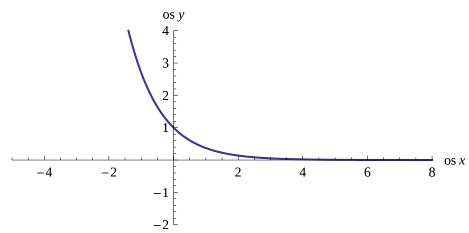


Slika 2.11: Graf eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 1$.

kar pokažemo na analogen način kot za $a > 1$.

Zaradi nekaterih zakonov naravne rasti je zelo pomembna osnova e oziroma potenčni funkciji e^x in e^{-x}.

Na Sliki 2.12 vidimo graf funkcije $f(x) = a^x$, ko je $a < 1$:



Slika 2.12: Graf eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ za $a < 1$.

Primer 2.35. *Skicirajmo grafa funkcij e^x in e^{-x}.*

Grafa obeh funkcij vidimo na Slikah 2.11 in 2.12.

(v) *Logaritemska funkcija*

Naj bo f eksponentna funkcija, torej

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1\,.$$

To je bijektivna funkcija, zato obstaja njej obratna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Imenujemo jo *logaritemska funkcija* in pišemo

$$f^{-1}(x) = \log_a x\,.$$

(Beremo: logaritem z osnovo a od x.)

Ker sta eksponentna in logaritemska funkcija obratni, velja

$$f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

in

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\,.$$

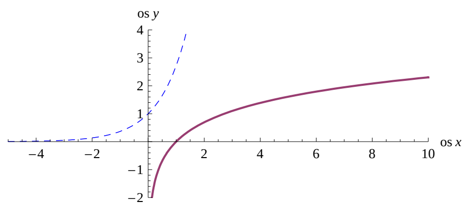
Imamo torej zvezo

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x\,.$$

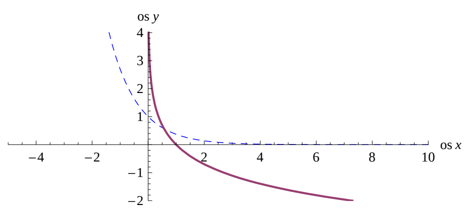
Logaritemska funkcija ima ničlo v točki 1, saj velja

$$0 = \log_a x \Leftrightarrow a^0 = 1 = x\,.$$

Graf logaritemske funkcije dobimo iz grafa eksponentne funkcije z zrcaljenjem preko premice $y = x$, kar vidimo na Slikah 2.13 in 2.14.



Slika 2.13: Graf logaritemske funkcije z osnovo $a > 1$.



Slika 2.14: Graf logaritemske funkcije z osnovo $a < 1$.

Izpeljimo nekaj lastnosti logaritma:

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x, y > 0$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a(xy)} &= x\,y \\ &= a^{\log_a x}\,a^{\log_a y} \\ &= a^{\log_a x + \log_a y}\,. \end{aligned}$$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_a \left(x\,\frac{y}{y}\right) \\ &= \log_a \left(\frac{x}{y}\,y\right) \\ &= \log_a \frac{x}{y} + \log_a y\,. \end{aligned}$$

(3) $\log_a x^y = y \log_a x,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}$

Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x^y} &= x^y \\ &= (a^{\log_a x})^y \\ &= a^{(\log_a x)y} \\ &= a^{y \log_a x}\,. \end{aligned}$$

Kadar je osnova enaka številu $e = 2.71828...$ govorimo o *naravnem logaritmu* in pišemo

$$\log_e x = \ln x\,.$$

Na Sliki 2.13 vidimo graf te funkcije.

(vi) *Hiperbolične funkcije*

Definirajmo *hiperbolični funkciji* kosinus hiperbolikus in sinus hiperbolikus

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \ldots \quad \text{kosinus hiperbolikus}\,,$$

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \ldots \quad \text{sinus hiperbolikus}\,.$$

Opazimo, da je prva funkcija soda, druga pa liha. Med njima veljajo naslednje zveze:

(1) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x$

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) \\ &= \mathrm{sh}(x+y)\,. \end{aligned}$$

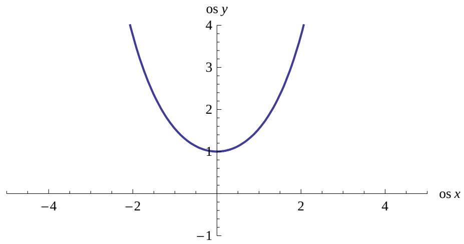
(2) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$

Pokažemo podobno kot (1).

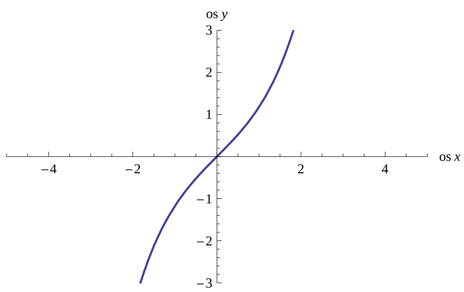
(3) $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x &= (\tfrac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\tfrac{e^x-e^{-x}}{2})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Na Sliki 2.15 vidimo graf funkcije sinus hiperbolikus in na 2.16 vidimo graf funkcije kosinus hiperbolikus.



Slika 2.15: Graf hiperbolične funkcije $\operatorname{sh} x$.



Slika 2.16: Graf hiperbolične funkcije $\operatorname{ch} x$.

2.4 Limite in zveznost funkcij

V tem razdelku bomo definirali limito funkcije in zatem še zveznost.

Limite

Definicija 2.36. *Naj bo funkcija f definirana v vsaki točki neke okolice točke a, razen morda v točki a sami. Število L je* limita funkcije *f v točki a, če velja naslednji sklep:*

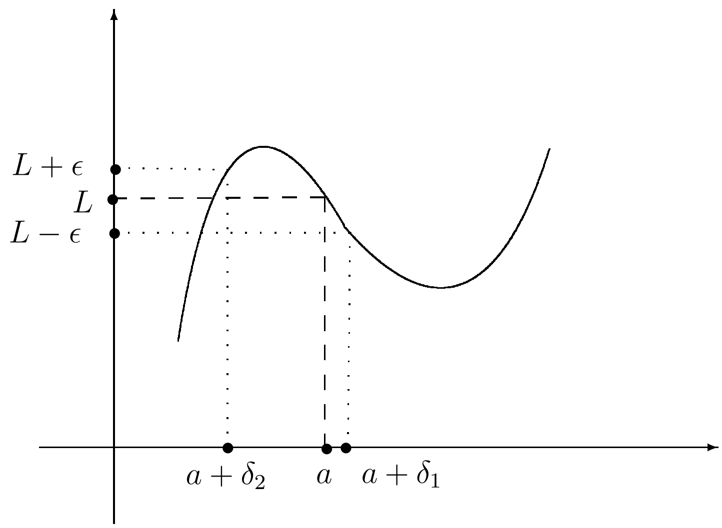
"Za vsako pozitivno število ϵ obstaja tako pozitivno število δ, da če za vsak $x \neq a$ velja $|x-a| < \delta$, potem mora veljati $|f(x) - L| < \epsilon$."

Pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ali} \quad f(x) \xrightarrow{x \to a} L\,.$$

Krajše:

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \neq a:\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\,.$$



Slika 2.17: Limita v točki a.

Iz Slike 2.17 je razvidna definicija limite funkcije v točki. Za okolico δ izberemo manjšo od obeh vrednosti δ_1 in δ_2.

Možne situacije:

a) f ni definirana v točki a in ima limito L,

b) f je definirana v točki a in ima limito L, ampak $f(a) \neq L$,

c) f je definirana v točki a in ima limito L ter $f(a) = L$,

d) f nima limite L, ima pa limito, ko se bližamo z desne oz. leve strani proti točki a.

Definicija 2.37. *Funkcija f ima v a* desno limito, *L^+, če velja:*

"Za vsako pozitivno število ϵ obstaja tako pozitivno število δ, da če za vsak $x \in (a, a+\delta)$ velja $|f(x) - L^+| < \epsilon$."

Krajše:

$$L^+ = \lim_{x \to a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L^+| < \epsilon\,.$$

Podobno definiramo levo limito, *L^-, funkcije f v točki a:*

$$L^- = \lim_{x \to a-0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L^-| < \epsilon\,.$$

Iz definicije desne in leve limite sledi v točki sledi, če obstaja limita L, tedaj sta leva limita L^- in desna limita L^+ enaki:

$$L = L^+ = L^- \Leftrightarrow L = \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

Primer 2.38. *Poiščimo levo in desno limito funkcije* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ *v točki* 0.

Premislimo, kaj se dogaja s funcijo f, ko se bližamo točki 0 enkrat iz pozitivne strani in drugič iz negativne. Ko se bližamo iz desne strani, gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ proti pozitivni neskončnosti, saj gre imenovalec proti vedno manjšim pozitivnim številom:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

Izraz $e^{\frac{1}{x}}$ zato v neskončnost narašča, kar pomeni, da je

$$L^+ = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0\,.$$

V primeru leve limite gre vrednost izraza $\frac{1}{x}$ proti negativni neskončnosti:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty\,,$$

zato gre $e^{\frac{1}{x}}$ proti 0 in leva limita je

$$L^- = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1\,.$$

Pri računanju z limitami velja podobno kot pri limiti zaporedij.

Izrek 2.39. *Naj bo* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *in* $\lim_{x\to a} g(x) = B$. *Tedaj velja:*

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = A\, B$,

(iii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Dokaz. Za ilustracijo pokažimo točko (i), medtem ko je (ii) in (iii) težje dokazati. Izberimo $2\epsilon > 0$. Ker je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$, za vsak $\epsilon > 0$ obstajata δ_1, δ_2 taka, da velja:

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon\,.$$

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \epsilon\,.$$

Tedaj velja:

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\,\epsilon$$

za vsak $|x-a| < \delta'$, kjer je $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ker je

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| \geq |f(x) - A + g(x) - B| = |(f(x) + g(x)) - (A+B)|\,,$$

dobimo

$$|(f(x) + g(x)) - (A+B)| < 2\,\epsilon\,,$$

za vsak $|x-a| < \delta'$. ∎

Definicija 2.40. *Funkcija f ima limito L, ko gre x proti neskončno, če za vsako pozitivno število ϵ obstaja tak $M > 0$, da $|f(x) - L| < \epsilon$ velja za vsak $x > M$.*

Krajše:

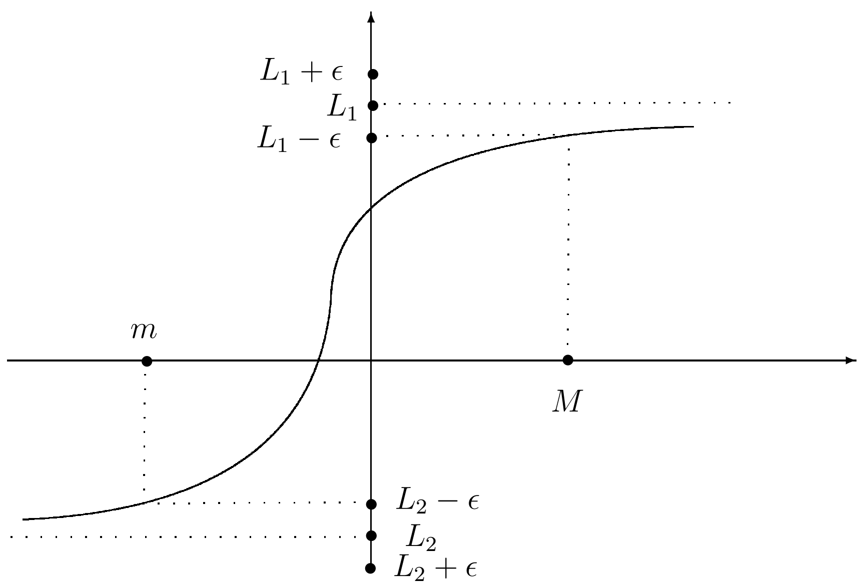
$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, M > 0, \forall\, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Podobno definiramo limito, ko gre x proti negativni neskončnosti:

$$L = \lim_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \exists\, m < 0, \forall\, x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Primer 2.41. *Izračunajmo* $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$.
Limita je enaka 0, ker je števec konstanten, imenovalec pa narašča v neskončnost.

Na Sliki 2.18 vidimo primer takšnih limit.



Slika 2.18: Limita funkcije, ko gre x proti neskončnosti.

Limito funkcije v točki a lahko pisemo tudi kot:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)\,.$$

Zveznost funkcije

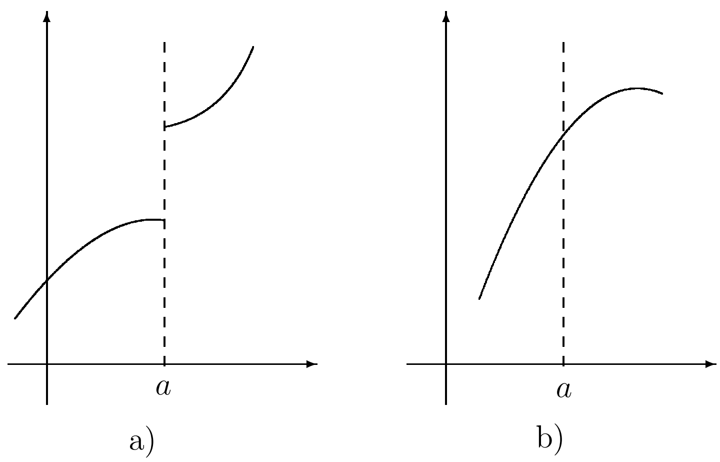
Definicija 2.42. *Naj bo funkcija f definirana na neki okolici točke a. Pravimo, da je f* zvezna *v a, če velja:*

"Za vsako pozitivno število ϵ obstaja tako pozitivno število δ, da če je $|x-a| < \delta$, potem mora veljati $|f(x) - f(a)| < \epsilon$."

Krajši zapis za zveznost funkcije f v točki a:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\,.$$

Na Sliki 2.19 vidimo primera pod a) nezvezne in pod b) zvezne funkcije.



Slika 2.19: a) V točki a nezvezna funkcija in b) zvezna funkcija.

Iz definicij limite in zveznosti sledi:

$$f \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Potrebni pogoji za zveznost funkcije f v točki a so:

a) f je definirana v točki a,

b) f ima limito v točki a,

c) limita je enaka funkcijski vrednosti.

Definicija 2.43. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je* zvezna*, če je zvezna v vsaki točki svoje domene D_f.*

Če f v točki a ni zvezna, potem velja ena izmed naslednjih možnosti:

a) f v točki a nima limite,

b) f ima limito v točki a, a ni enaka $f(a)$,

c) f v točki a nima limite, ima pa levo in desno limito, ki nista enaki.

Naslednji izrek podaja pomebno lastnost limite kompozituma zveznih funkcij, ki jo bomo v nadaljevanju potrebovali. Izreka ne bomo dokazali.

Izrek 2.44. *Če sta f in g zvezni funkciji v točki a, tedaj je*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) \,.$$

Izrek 2.45. *Če sta funkciji f in g zvezni v točki a in je $c \neq 0$ neko število, potem so v a zvezne tudi funkcije*

i) $f \pm g$,

ii) $c \cdot f$,

iii) $f \cdot g$,

iv) $\dfrac{f}{g}$, *če je* $g \neq 0$.

Dokaz. Sledi neposredno iz Izreka 2.39. ∎

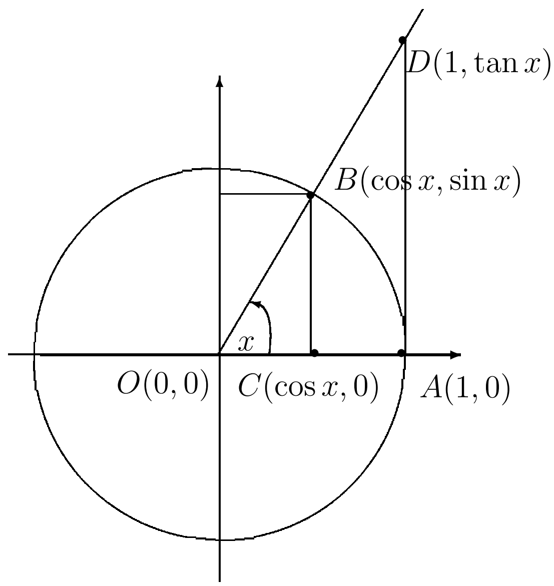
Poglejmo natančneje nekaj najpomembnejših limit:

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Poglejmo si, izpeljavo te pomembne limite.

Izberimo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ in naj bo $A(1,0)$, $B(\cos x, \sin x)$, $C(\cos x, 0)$, $D(1, \tan x)$ ter $O(0,0)$, kot je to razvidno s Slike 2.20. Nadalje naj bo S_1 ploščina trikotnika AOB, S_2 ploščina trikotnika AOD in S ploščina krožnega izseka AOB. Poudarimo, da je ploščina krožnega izseka s polmerom r enaka $r^2\frac{x}{2}$. Tedaj velja:

$$\begin{array}{ccccccc}
S_1 & \leq & S & \leq & S_2 & & \\
\frac{1}{2}\sin x & \leq & \frac{x}{2} & \leq & \frac{1}{2}\tan x & / \cdot 2 \,/ : \sin x & \\
1 & \leq & \frac{x}{\sin x} & \leq & \frac{1}{\cos x} & & \\
1 & \geq & \frac{\sin x}{x} & \geq & \cos x & & \\
 & & \downarrow x \to 0 & & & & \\
1 & \geq & \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} & \geq & 1 & \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \,. &
\end{array}$$



Slika 2.20: Izpeljava limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$

Te limite ne bomo izpeljevali, ker je njena izpeljava zahtevnejša.

(iii) $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

V (ii) vpeljemo $y = \frac{1}{x}$ limita je neposredna posledica.

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Izačunajmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \mathrm{e} = 1\,.$$

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$

Na analogen način kot v (iv) dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \mathrm{e} = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}\,.$$

(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Vpeljemo $u = a^x - 1$ in dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\log_a(u+1)} = \lim_{u\to 0} \left(\frac{\log_a(u+1)}{u} \right)^{-1} = \ln a\,.$$

2.5 Zvezne funkcije na zaprtem intervalu

V zadnjem razdelku smo spoznali definicijo zveznosti funkcije, sedaj pa nas bodo zanimale lastnosti posebnih funkcij in sicer takih, ki so zvezne na zaprtem intervalu. Izkaže se, da imajo le-te veliko lepih lastnosti.

Zanimajo nas funkcije na zaprtih intervalih

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}\,.$$

Definicija 2.46. *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je* zvezna*, če je zvezna v vsaki točki odprtega intervala (a, b) in v točki a obstaja desna limita, ki je enaka $f(a)$ in v točki b leva limita, ki je enaka $f(b)$:*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ 0 < h < \delta \Rightarrow$$

$$|f(a) - f(a+h)| < \epsilon \ \wedge\ |f(b) - f(b-h)| < \epsilon\,.$$

Z $\mathcal{C}[a, b]$ označujemo množico zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a, b]$.

V zvezi z zveznostjo funkcij na zaprtem intervalu velja nekaj pomembnih izrekov. Večino bomo navedli brez dokaza in jih bomo samo ilustrirali na primerih. Radovednejši bralec si lahko dokaze izrekov pogleda v [5] ali [6].

Izrek 2.47. *Naj bo $f \in [a, b]$ in $f(a)\,f(b) < 0$. Tedaj obstaja $c \in (a, b)$ takšna, da je $f(c) = 0$.*

Primer 2.48. *Naj bo $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 4$. Pokažimo, da ima f na intervalu $[0, 4]$ ničlo.*

Ker je $f(0) = 4 > 0$ in $f(4) = -12 < 0$ po Izreku 2.47 obstaja ničla funkcije f na $[0, 4]$ in sicer je to točka $x = 2$.

Definicija 2.49. *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na $[a, b]$* navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \leq M,\ \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Podobno je f navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \geq m,\ \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Števili M in m imenujemo zgornja *oz.* spodnja meja *funkcije f na $[a, b]$.*

Definicija 2.50. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Najmanjša zgornja meja M' je* natančna zgornja meja *ali* supremum *funkcije f:*

$$M' = \sup_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

Največja spodnja meja m' je natančna spodnja meja *ali* infimum *funkcije f:*

$$m' = \inf_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

Opazimo, da je

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}\,,$$
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \inf\{f(x), x \in [a,b]\}\,.$$

Izrek 2.51. *Vsaka zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu je omejena.*

Primer 2.52. *Preverimo Izrek 2.51 na primerih.*

1. *Naj bo* $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = x^2$.

   Vidimo, da je f zvezna in po Izreku 2.51 omejena in sicer je $M \geq f(3)$ in $m \leq f(0)$.

2. *Naj bo* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & ; \quad sicer. \end{cases}$$

   Vidimo, da je f ni omejena in po Izreku 2.51 zato ni zvezna.

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$. Če natančna zgornja meja M' pripada zalogi vrednosti funkcije f, tedaj je M' *maksimum* funkcije f na D:

$$M' = \max_{x\in D} f(x)\,.$$

In podobno, če natančna spodnja meja m' pripada zalogi vrednosti funkcije f, tedaj je m' *minimum* funkcije f na D:

$$m' = \min_{x\in D} f(x)\,.$$

Primer 2.53. *Če obstajata, poiščimo minimum in maksimum funkcij.*

1. *Naj bo* $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = x^2$.

   Maksimum doseže v točki 2 in sicer je $M' = 4$, minimum pa v točki 1 in velja $m' = 1$.

2. *Naj bo* $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = tan\, x$.

   Minimum doseže v točki 0 in sicer je $m' = 0$, maksimuma pa nima.

3. *Naj bo* $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \frac{\pi}{2})$ *podana s predpisom* $f(x) = atan\, x$.

   Nima maksimuma, niti minimuma.

Na Primeru 2.53 smo videli, da je od treh primerov le zvezna funkcija na zaprtem intervalu dosegla minimum in maksimum. V zvezi s tem podajmo naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali.

Izrek 2.54. *Zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ doseže na intervalu $[a, b]$ minimum in maksimum.*

Za konec dokažimo zadnji izrek v zvezi z zveznostjo funkcij na zaprtem inervalu, ki se glasi.

Izrek 2.55. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom.*

Dokaz. Naj bo

$$m' = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{in} \quad M' = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

ter $f(\alpha) = m'$ in $f(\beta) = M'$. Točki α in β obstajata zaradi Izreka 2.54.

Če je $\alpha = \beta$, potem je $f(x) = m' = M'$ za vsak $x \in [a, b]$ in ni kaj za dokazovat.

Predpostavimo sedaj, da je $\alpha < \beta$. Definirajmo novo funkcijo $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\Psi(x) = f(x) - C\,,$$

kjer je C poljubna vrednost med m' in M'. Trdimo, da obstaja tak $\varphi \in [a, b]$, da je $f(\varphi) = C$. Ker je f zvezna, je tudi nova funkcija Ψ zvezna za vsak $C \in [m', M']$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= f(\alpha) - C = m' - C < 0\,, \\ \Psi(\beta) &= f(\beta) - C = M' - C > 0\,. \end{aligned}$$

Po Izreku 2.47 obstaja $\varphi \in [\alpha, \beta]$ tak, da je $\Psi(\varphi) = 0$ in zato $f(\varphi) - C = 0$. ∎

Iz Izreka 2.55 sledi naslednja posledica.

Posledica 2.56. *Zaloga vrednosti zvezne funkcije definirane na $[a, b]$ je interval $[m', M']$, kjer je*

$$m' = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \textit{in} \quad M' = \max_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

2.6 Naloge

Osnovne lastnosti

1. Poišči obratno funkcijo od $f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

2. Poišči obratno funkcijo od:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x < -1 \\ -x^2+4x+5 & ; \quad -1 \le x \le 2 \\ x+7 & ; \quad x > 2\,. \end{cases}$$

3. Naj bo $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $g(x) = x^2 - 1$. Poišči $f \circ g$ in $g \circ f$.

4. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; \quad x \ge 0 \\ -(x-1)^{-2} & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \ge -1 \\ 0 & ; \quad x < -1\,. \end{cases}$$

Poišči $f \circ g$ in $g \circ f$.

5. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad x \ge 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| \ge 2 \\ x^2-4 & ; \quad |x| < 2\,. \end{cases}$$

Poišči $f \circ g$ in $g \circ f$.

6. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 3x & ; \quad x \le 0 \\ x^3 & ; \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x > 8 \\ -\frac{1}{2}x & ; \quad x \le 8\,. \end{cases}$$

Poišči $f \circ g$ in $g \circ f$.

Zaporedja

1. Določi x tako, da bodo

$$\log 2, \log(2^x - 1), \log(2x+3)$$

zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

2. Vsota treh števil je 62, vsota njihovih 10-tiških logaritmov pa 3. Poišči ta števila, če tvorijo geometrijsko zaporedje.

3. Preuči omejenost, monotonost in konvergentnost zaporedja:

   a) $a_n = \frac{1}{2n+1}$.

   b) $a_n = \frac{1000n}{n^2+1}$.

4. Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{5n-2}{n^2+n-1}\,.$$

a) Razišči zaporedje a_n.

b) Od katerega člena naprej so vsi členi zaporedja a_n v ϵ okolici limite od (a_n), če je $\epsilon = 10^{-3}$?

5. Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{n}{n+(-1)^n} .$$

a) Razišči zaporedje a_n.

b) Od katerega člena naprej so vsi členi zaporedja a_n v ϵ okolici točke 1, če je $\epsilon = 10^{-3}$?

6. Izračunaj limite:

a) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+16}$,

b) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-5n}{2n^2+16}$,

c) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+5n-1}{n+1}$,

d) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-3)(n^2-1)(n^2+7)}{(4n+3)^5}$,

e) $a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{3n+7}\right)^4$,

f) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$,

g) $a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

h) $a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,

i) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$,

j) $a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$,

k) $a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}$,

Pregled elementarnih funkcij

1. Poišči naravno definicijsko območje:

a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

b) $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{2x+7}\right) + \sqrt{x^2-4}$,

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$,

d) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x)))$.

2. Določi sodost oz. lihost funkcij:

a) $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$,

b) $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$,

c) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

3. Poišči D_f, Z_f, f^{-1} za:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$,

b) $f(x) = \mathrm{sh}(x)$.

4. Skiciraj graf funkcij:

a) $f(x) = |\cos x|$,

b) * $f(x) = \cos|x|$.

5. Skiciraj graf funkcij:

a) $f(x) = 2 + x - 2x^2 - x^3$,

b) $f_1(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x,\ f_2(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x,\ f_3(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^x$,

c) $f_1(x) = \log_2(x-3),\ f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,

Limite in zveznost

1. Izračunaj limite:

a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$,

b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$,

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$,

d) $\lim_{u\to \frac{2}{\sqrt{5}}} \dfrac{5u^2 - 4}{(\frac{4}{5} - u^2)(\frac{2}{\sqrt{5}} + u)}$,

e) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$,

f) $\lim_{x\to -1} \dfrac{10x^3 + 6x^2 - 18x - 14}{7x^3 + 19x^2 + 17x + 5}$,

g) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$.

2. S pomočjo znanih limit izračunaj:

   a) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$,

   b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$,

   c) $\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\ln(\cos^2 x)$,

   d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$,

   e) $\lim_{x\to 0}x^{-1}\operatorname{sh}x$,

   f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$,

   g) $\lim_{x\to \mathrm{e}}\dfrac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}$,

   h) $\lim_{x\to 0}x^{-1}\sin(\operatorname{sh}x)$,

   i) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$,

   j) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

3. Izračunaj limite:

   a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$,

   b) $\lim_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$,

   c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$,

   d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6+x}-\sqrt[3]{12-x^2}}{x-2}$,

   e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)$.

4. Določi realni števili a in b tako, da bo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0\,.$$

5. Dana je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & ; \quad |x|\le\frac{\pi}{2}\\ |x-\frac{\pi}{2}| & ; \quad |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

   Če obstajata, poišči limiti v točkah $x=\frac{\pi}{2}$ in $x=-\frac{\pi}{2}$.

6. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & ; \quad |x| > 1 \\ 2x + 2 & ; \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -2x^2 + 2 & ; \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Če obstajajo, poišči limite v točkah $x = -1$, $x = 0$ in $x = 1$.

7. Določi $f(0)$ tako, da bo funkcija

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

povsod zvezna.

8. Poišči točke nezveznosti funkcij:

a)

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x \leq 0 \\ x - 1 & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln x & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+3} & ; \quad x < -2 \\ -\frac{1}{6}(x^2 - 16) & ; \quad |x| < 2 \\ \ln(x - 2) & ; \quad x > 2 \\ 2 & ; \quad |x| = 2 \end{cases}$$

9. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x < -1 \\ e^{x-3} & ; \quad x > 3\,. \end{cases}$$

Določi $f(x)$ na intervalu $[-1, 3]$ tako, da bo na tem intervalu polinom druge stopnje, ki gre skozi koordinatno izhodišče in bo $f(x)$ zvezna na celem $\mathbb{R}$.

10. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & ; \quad x \leq \frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad x \geq \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

Določi konstanti a in b tako, da bo f zvezna na celem $\mathbb{R}$.

Poglavje 3

Diferencialni račun

V diferencialnem računu nas bo zanimal odvod in vse, kar je v povezavi z njim. V zvezi s tem bomo spoznali vlogo odvoda pri tangenti na graf funkcije, pomen diferenciala, vpliv odvoda na lastnosti funkcije in pa primer uporabe odvoda v kemiji.

3.1 Odvod funkcije in geometrijski pomen

Najprej definirajmo odvod in si poglejmo povezavo med tangento na graf funkcije in odvodom.

Definicija 3.1. *Naj bo funkcija f definirana na neki okolici točke x. Izrazu*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pravimo diferenčni kvocient*. Funkcije f je* odvedljiva *v točki x, če obstaja limita diferenčnega kvocienta, ko gre h proti 0. Tej limiti rečemo* odvod *funkcije f v točki x in jo označimo s $f'(x)$:*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

Definicija 3.2. Desni odvod *funkcije f v točki x je enak desni limiti diferenčnega kvocienta,* levi odvod *pa levi limiti.*

Ni težko videti, da je funkcija f odvedljiva v točki a natanko tedaj, ko sta levi in desni odvod enaka.

Definicija 3.3. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je* odvedljiva*, če je odvedljiva v vsaki točki definicijskega območja D. Funkciji, ki x priredi $f'(x)$ pravimo* odvod *funkcije f.*

Izrek 3.4. *Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.*

Dokaz. Naj bo x poljubna točka iz definicijskega območja funkcije f in naj bo f odvedljiva v točki x. Definirajmo funkcijo $r(h)$:

$$r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

oziroma

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)h \,.$$

Limitirajmo desno stran enakosti:

$$\lim_{h \to 0} (f'(x)h + r(h)h) = 0 \,,$$

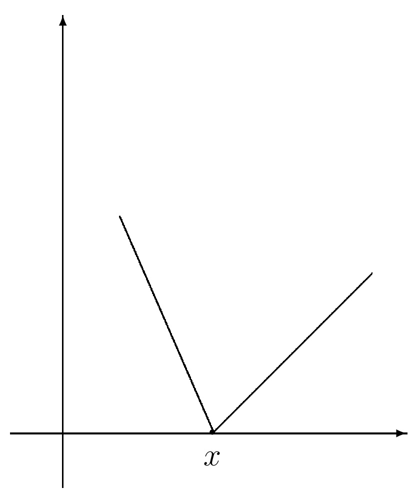
kar pomeni, da je

$$\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

in f je zvezna v točki x. ∎

Ne velja pa obratno, da bi bila vsaka zvezna funkcija tudi odvedljiva, kar lahko vidimo na zelo preprostem primeru funkcije na Sliki 3.1.



Slika 3.1: Funkcija je zvezna v točki x, ampak v njej ni odvedljiva.

Primer 3.5. *Dana je funkcija $f(x) = x$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.*

Naj bo x poljubna točka iz $D_f = \mathbb{R}$. Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,. \end{aligned}$$

Zato je $(x)' = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

Primer 3.6. *Dana je funkcija $f(x) = \sin x$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.*

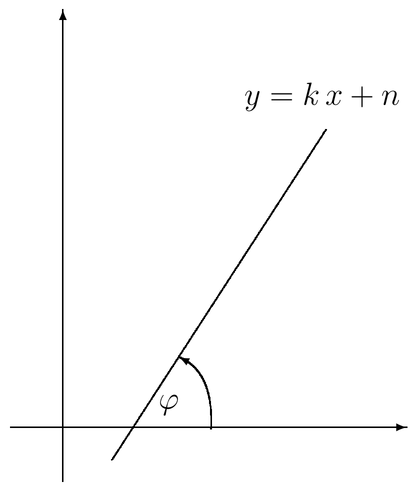
Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{h}{2}) - (\cos^2\frac{h}{2} + \sin^2\frac{h}{2})}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}\,\frac{1}{2}}{h\,\frac{1}{2}} + \cos x \cdot 1 \\ &= \sin x \lim_{h\to 0}(-\sin\tfrac{h}{2}) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos x \\ &= \sin x \cdot 0 \cdot 1 + \cos x \\ &= \cos x\,. \end{aligned}$$

Zato je $(\sin x)' = \cos x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

Preden si bomo pogledali geometrijski pomen odovoda, se spomnimo, da je tangens naklonskega kota φ premice, določene z $y = kx + n$, enak njenemu smernemu koeficientu (*glej Sliko 3.2*) :

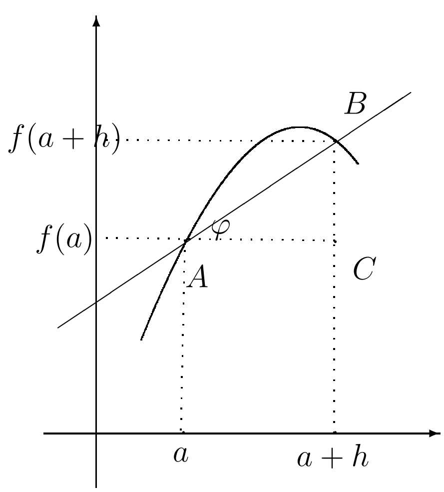
$$\tan\varphi = k\,.$$



Slika 3.2: Naklonski kot premice.

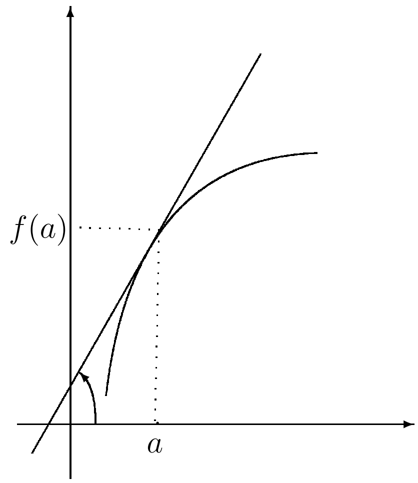
Naj bo funkcija f odveljiva v točki a. Definirajmo točke $A(a, f(a))$, $B(a + h, f(a+h))$ in $C(a+h, f(a))$. Naj bo φ naklonski kot sekante skozi točki A in B, kot je to razvidno na Sliki 3.3. Opazimo, da je smerni koeficient sekante enak diferenčnemu kvocientu:

$$\tan\varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$



Slika 3.3: Sekanta skozi točki $A(a, f(a))$ in $B(a+h, f(a+h))$.

Z manjšanjem h-ja prehajajo smerni koeficienti pripadajočih sekant k limiti diferenčnega kvocienta, sekanta pa limitira k tangenti, kar vidimo na Sliki 3.4.



Slika 3.4: Tangenta na graf funkcije f.

Definicija 3.7. Tangenta *na graf funkcije f v točki a je premica, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ in je njen smerni koeficient enak $f'(a)$.*

Enačba tangente je enaka

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)\,.$$

Primer 3.8. *Dana je funkcija $f(x) = x^2$. Poiščimo enačbe tangent v točkah* $0, -1, 2$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

Enačbe tangent so:

$$\begin{aligned} (0,0):&\quad y = 0\,, \\ (-1,1):&\quad y = -2(x+1) + 1 = -2x - 1\,, \\ (2,4):&\quad y = 4(x-2) + 4 = 4x - 4\,. \end{aligned}$$

Primer 3.9. *Poiščimo odvod in enačbo tangente na graf konstantne funkcije.*

Naj bo $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0\,.$$

Enačba tangente je

$$y = c\,,$$

kar pomeni, da je funkcija sama sebi tangenta.

3.2 Pravila za odvajanje in odvodi elementarnih funkcij

Če želimi karkoli uporabljati odvod, moramo znati odvajati funkcije in to bo jedro tega razdelka.

Izrek 3.10. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi funkciji v točki x in c poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$ različna od 0. Potem so v x odvedljive tudi funkcije $f+g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ in za vsak $g \neq 0$ tudi funkcija $\frac{f}{g}$. Pri tem velja:*

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $(c\,f)'(x) = c\,f'(x)$,

(iii) $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$.

Dokaz. Vemo že, da je limita vsote/produkta/kvocienta enaka vsoti/produktu/kvocientu limit pri pogoju, da le-te obstajajo.

(i) Odvod vsote:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Odvod produkta s konstanto:

$$\begin{aligned}
(c\,f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(c\,f)(x+h) - (c\,f)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c\,f(x+h) - c\,f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= c\,f'(x)\,.
\end{aligned}$$

(iii) Odvod produkta funkcij:

$$\begin{aligned}
(f\,g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\,g)(x+h)-(f\,g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.
\end{aligned}$$

(iv) Odvod kvocienta:

Pokažimo najprej $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\,.$

$$\begin{aligned}
1 &= g(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) \qquad / \text{ odvajamo} \\
0 &= g'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + g(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}$$

Izračunajmo sedaj odvod kvocienta f in g, če je $g \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \\
&= \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}$$

∎

Iz Izreka 3.10 o pravilih za odvajanje v poljubni točki sledijo pravila:

$(f+g)' = f' + g'$,

$(c\,f)' = c\,f'$,

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g',$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}\,.$$

Pravilo o odvajanju produkta lahko z indukcijo posplošimo na več faktorjev:

$$(f_1\,f_2\cdots f_n)' = f_1'\,f_2\cdots f_n + f_1\,f_2'\cdots f_n + \cdots + f_1\,f_2\cdots f_n'\,.$$

V primeru, ko je $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$, iz zgornje formule sledi kar pomeni, da je

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'\,.$$

Primer 3.11. *Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^n$.*

Ker je $x' = 1$, je po zgornji formuli je

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}\,x' = n\,x^{n-1}\,.$$

Eno najpomembnejših pravil za odvajanje je odvod kompozituma funkcij oz. *verižno pravilo.*

Izrek 3.12. *(Verižno pravilo) Naj bo funkcija g odvedljiva v točki x in naj bo f odvedljiva v točki $g(x)$. Tedaj je tudi $f\circ g$ odvedljiva v x in velja*

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g(x)\,.$$

Dokaz. Kljub temu, da je dokaz malo zahtevnejši, ga izpeljimo. Označimo $y = g(x)$ in definirajmo funkciji $\alpha(h)$ in $\beta(k)$:

$$\begin{aligned}\alpha(h) &= \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)\,,\\ \beta(k) &= \frac{f(y+k)-f(y)}{k} - f'(y)\,,\end{aligned}$$

pri čemer je k odvisen od h:

$$k = g(x+h) - g(x) = \alpha(h)\,h + g'(x)\,h\,.$$

Pri tem velja

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h) = \lim_{k\to 0}\beta(k) = 0\,.$$

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x) &= f(g(x+h))-f(g(x)) \\
&= f(g(x)+k)-f(g(x)) \\
&= f(y+k)-f(y) \\
&= f'(y)\,k+\beta(k)\,k \\
&= f'(y)(g(x+h)-g(x))+\beta(k)\,(g(x+h)-g(x))\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(y)\,(g(x+h)-g(x))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\beta(k)\,(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= f'(y)\,g'(x)+0\cdot g'(x) \\
&= f'(g(x))\,g'(x)\,.
\end{aligned}
$$

∎

Primer 3.13. *Poiščimo odvod funkcije $h(x)=\sin(5x)$.*

Funkcija h je kompozitum funkcij $f(x)=\sin x$ in $g(x)=5x$:

$$h(x)=f(g(x))=\sin(5x)\,.$$

Ker je $f'(x)=\cos x$ in $g'(x)=5$, je po zreku 3.12

$$h'(x)=f'(g(x))\,g'(x)=\cos(5x)\,5\,.$$

Izrek 3.14. *Naj bo f odvedljiva v točki x. Če je $f'(x)\neq 0$ za vsako točko definicijskega območja, tedaj je inverzna funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $y=f(x)$ in velja*

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Dokaz. Naj bo $y=f(x)$, tedaj je $f^{-1}(y)=x$ oziroma $f^{-1}(f(x))=x$. Uporabimo Izrek 3.12:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(f(x)))' &= x' \\
(f^{-1})'(f(x))f'(x) &= 1 \qquad\qquad \Rightarrow \\
(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.
\end{aligned}
$$

∎

V nadaljevanju si poglejmo odvode elementarnih funkcij.

(i) Polinom in racionalna funkcija

Poglejmo si najprej odvode polinomov:

$$(a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0)' = a_n\, n\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0\,.$$

Racionalno funkcijo odvajamo po pravilu za odvajanje kvocienta funkcij:

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}\,.$$

(ii) Trigonometrične funkcije

Poznamo že odvod funkcije sinus:

$$(\sin x)' = \cos x\,.$$

Iz zveze

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

dobimo odvod funkcije kosinus

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \big(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)\big)' \\
&= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)(\tfrac{\pi}{2} - x)' \\
&= \sin x\,(-1) \\
&= -\sin x\,.
\end{aligned}$$

Nadalje je odvod funkcije tangens enak:

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos x\, \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\,.
\end{aligned}$$

Na podoben način izpeljemo odvod funkcije kotangens:

$$\begin{aligned}
(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\
&= \frac{-\sin x\, \cos x - \cos x\, \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x}\,.
\end{aligned}$$

(iii) Ciklometrične funkcije

Naj bo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tedaj je $\cos y > 0$ in velja

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\,.$$

Za $|x| < 1$ je $\operatorname{asin} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in zato

$$\frac{1}{\cos(\operatorname{asin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{asin} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Upoštevajmo Izrek 3.14 in izračunajmo odvod funkcije arkus sinus:

$$\begin{aligned}(\operatorname{asin} x)' &= \frac{1}{\cos(\operatorname{asin} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,.\end{aligned}$$

Iz zveze

$$\operatorname{acos} x + \operatorname{asin} x = \frac{\pi}{2}$$

dobimo odvod funkcije arkus kosinus:

$$(\operatorname{acos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,.$$

Poiščimo odvod funkcije arkus tangens. Podobno kot pri funkciji arkus sinus uporabimo Izrek 3.14 in upoštevamo zvezo $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$:

$$\begin{aligned}(\operatorname{atan} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{atan} x)}} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\operatorname{atan} x) + 1} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\,.\end{aligned}$$

Iz zveze

$$\operatorname{acot} x + \operatorname{atan} x = \frac{\pi}{2}$$

dobimo odvod funkcije arkus kotangens:

$$(\operatorname{acot} x)' = -\frac{1}{x^2+1}\,.$$

(iv) Eksponentna funkcija

Spomnimo se, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a\,.$$

Uporabimo definicijo odvoda v točki:

$$\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= a^x \ln a\,.
\end{aligned}$$

V posebnem primeru, ko je osnova enaka e, velja:

$$(e^x)' = e^x$$

(v) Logaritemska funkcija

Za izračun odvoda logaritemske funkcije ponovno uporabimo Izrek 3.14 in upoštevamo zgoraj izpeljan odvod eksponentne funkcije:

$$\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \frac{1}{a^{\log_a x}\, \ln a} \\
&= \frac{1}{x\, \ln a}\,.
\end{aligned}$$

Odvod naravnega logaritma je enak

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

(v) Potenčna funkcija

Z uporabo verižnega pravila poiščimo odvod potenčne funkcije $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(x^r)' &= \left(e^{\ln x^r}\right)' \\
&= \left(e^{r\,\ln x}\right)' \\
&= e^{r\,\ln x}(r\,\ln x)' \\
&= e^{\ln x^r}(r\,\tfrac{1}{x}) \\
&= x^r\,(r\,\tfrac{1}{x}) \\
&= r\,x^{r-1}\,.
\end{aligned}$$

Vidimo, da ta formula ne velja le za naravne eksponente, kot smo to videli pri polinomih, temveč za poljubni realni eksponent.

(v) Hiperbolični funkciji

Izračunajmo odvod funkcije sinus hiperbolikus:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sh} x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \operatorname{ch} x\,.
\end{aligned}
$$

Na podoben način izračunamo odvod funkcije kosinus hiperbolikus:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ch} x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \operatorname{sh} x\,.
\end{aligned}
$$

Tabela odvodov elementarnih funkcij:

$(x^r)' = r\,x^{r-1}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{asin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{acos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{atan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{acot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x\ \ln a$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

Primer 3.15. *Izračunajmo odvode sestavljenih funkcij.*

1. $f(x) = 10x^4 + 5x^3 - 3x + 9\,.$

   $f'(x) = 40x^3 + 15x^2 - 3\,.$

2. $f(x) = \ln(x + 5x^3)\,.$

   $f'(x) = \dfrac{1}{x + 5x^3}(1 + 15x^2)\,.$

3. $f(x) = \sqrt[3]{asin\,x}\,.$

   $f'(x) = \dfrac{1}{3}(asin\,x)^{-\frac{2}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$

3.3 Odvod implicitno podane funkcije

Ker funkcije niso nujno podane samo eksplicitno, želimo znati odvajat tudi drugače podane funkcije.

Vemo že, da je funkcija $y = y(x)$ lahko podana implicitno z enačbo

$$g(x, y) = 0\,.$$

Primer 3.16. *Ali spodnji enačbi predstavljata funkcijo.*

1. $xy + 2y = 3$

   V tem primeru je $g(x, y) = xy + 2y - 3 = 0$ in $y(x) = \dfrac{3}{x+2}$ in odgovor je da.

2. $x^2 + y^2 = 3$

   V tem primeru je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$, medtem ko se y ne da enolično eksplicitno izraziti kot $y = y(x)$ in ne moremo govoriti o funkciji.

Odvod implicitno podane funkcije najkorektneje podamo s tako imenovanimi *parcialnimi odvodi*, ki spadajo na področje funkcij več spremenljivk in jih na tem mestu ne bomo obravnavali. Tako se bomo poslužili verižnega pravila, ki nam omogoča izračun odvoda preprostejših implicitno podanih funkcij. Verižno pravilo uporabimo tako, da gledamo na y kot $y(x)$:

$$f(y(x))' = f'(y(x))y'(x)\,.$$

Odvod sedaj ni odvisen samo od izbire $x - a$, temveč tudi od izbire druge koordinate točke, v kateri računamo odvod.

Primer 3.17. *Izračunajmo odvod implicitno podanih funkcij.*

1. $xy(x) + 2y(x) = 3$.

   $y(x) + xy'(x) + 2y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{y(x)}{x+2}$.

   Preverimo z odvodom eksplicitno podane funkcije
   $$y(x) = \frac{3}{x+2}$$
   in
   $$y'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} = -\frac{y(x)}{x+2}.$$

2. $x^2 + y(x)^2 = 3$.

   $2x + 2y(x)y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$.

3. $y(x) = \sqrt{x}$.

   Funkcijo lahko implicitno zapišemo kot $y^2(x) = x$ in z odvajanjem dobimo
   $$2y(x)y'(x) = 1 \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2y(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.4 Višji odvodi

Z zaporednim odvajanjem večkrat odvedljive funkcije dobimo tako imenovane *višje odvode*.

Definicija 3.18. *Naj bo f odvedljiva funkcija. Če je f' odvedljiva funkcija, potem njenemu odvodu pravimo* drugi odvod *funkcije f in ga označujemo z f'':*
$$f'' = (f')'.$$
Induktivno definiramo n-ti odvod funkcije f:
$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \; n \in \mathbb{N}.$$

Po dogovoru je ničelni odvod funkcije enak funkciji sami:
$$f^{(0)} = f.$$

Omenimo še, da prve tri odvode običajno zapisujemo s črticami, od tretjega naprej pa kot $f^{(n)}$.

Primer 3.19. *Izračunajmo poljuben odvod funkcije $f(x) = x^n$.*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= n\,x^{n-1}\\
f''(x) &= n\,(n-1)\,x^{n-2}\\
f'(x) &= n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\\
\vdots\quad &\quad \vdots\\
f^{(n)}(x) &= n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 2\cdot 1\,x^0 = n!\\
f^{(r)}(x) &= 0\,,\ r > n\,.
\end{aligned}
$$

Na Primeru 3.19 opazimo, da je n-ti odvod polinoma stopnje n konstanta, zato so vsi višji odvodi enaki nič.

Opomba. Simbol $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 2\cdot 1$ beremo n-fakulteta ali n-faktorsko.

3.5 Izreki o srednji vrednosti

V tem tazdelku bomo spoznali nekaj pomebnih izrekov v povezavi z odvodom, ki so nujni za naslednje poglavje o integralnem računu.

Definicija 3.20. *Funkcija f ima v c* lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja*

$$f(x) \leq f(c)\,.$$

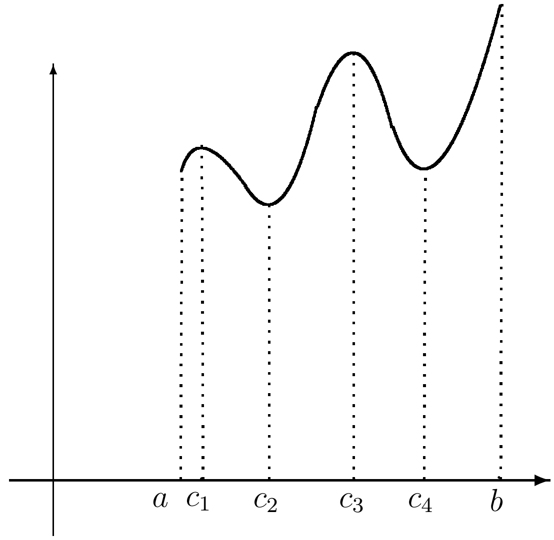
Funkcija ima v točki c lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja*

$$f(x) \geq f(c)\,.$$

Lokalni minimum in lokalni maksimum imenujemo tudi lokalna ekstrema.

Na primeru funkcije f na Sliki 3.5 vidimo, da ima funkcija f v točkah c_2 in c_4 lokalna minimuma, v točkah c_1 in c_3 pa lokalna maksimuma. Medtem ko je v c_2 obenem minimum funkcije, je maksimum funkcije dosežen v točki b.

Izrek 3.21. *Naj bo f odvedljiva v točki c in naj ima v c lokalni maksimum ali lokalni minimium. Tedaj je $f'(c) = 0$.*



Slika 3.5: (Lokalni) minimumi in maksimumi.

Dokaz. Recimo, da ima funkcija f v točki c lokalni maksimum. Tedaj za vsako dovolj majhno pozitivno število h velja

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0\,.$$

Izračunajmo desni odvod v točki c ($h>0$):

$$\lim_{h\to c+0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

in še levi odvod v točku c ($h<0$):

$$\lim_{h\to c-0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0\,.$$

Ker je f odvedljiva v točki c, sta levi in desno odvod enaka, zato je edina možnost, da imata oba vrednost 0. Podobno velja v primeru, ko ima funkcija v točki c lokalni minimum. ∎

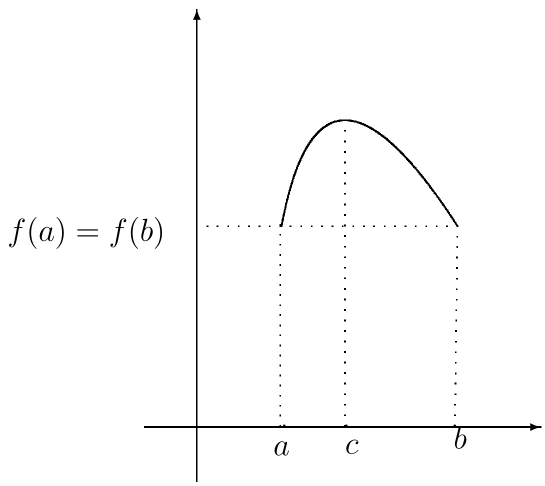
Definicija 3.22. *Točko c v kateri je $f'(c)=0$, imenujemo* stacionarna točka.

Vsak lokalni ekstrem je torej tudi stacionarna točka, medtem ko obratno ne velja, kar vidimo na primeru .

Primer 3.23. *Poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x)=x^3$ in preveri, če so lokalni ekstemi.*

$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$, kar pomeni, da ima f v $x=0$ stacionarno točko. Ker je za pozitivne vrednosti $f>0$ in za negativne $f<0$, v $x=0$ ni lokalnega ekstrema.

Izrek 3.24. *(Rolleov izrek) Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, tedaj obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$ (glej Sliko 3.6).*



Slika 3.6: Rolleov izrek.

Dokaz. Ker je f zvezna, po Izreku 2.54 doseže na intervalu $[a, b]$ maksimum in minimum. Ločimo dve možnosti.

(i) Maksimum in minimum sta dosežena v krajiščih intervala.

Ker je $f(a) = f(b)$, maksimum in minimum sovpadata in je funkcija f konstantna, kar pomeni, da je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a, b)$.

(ii) Vsaj eden od maksimuma ali minimuma je dosežen v notranjosti intervala.

Naj se to zgodi v točki c. Tedaj je po Izreku 3.21 $f'(c) = 0$.

∎

Izrek 3.25. *(Cauchyjev izrek) Naj bosta funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b) in je $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a, b)$, da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Po Izreku 3.24 je $g(b) \neq g(a)$, saj bi sicer obstajala točka $c \in (a, b)$ taka, da bi veljalo $g'(c) = 0$, kar bi bilo protislovno s predpostavkami izreka.

Definirajmo funkcijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ kot:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Vidimo, da je tudi F zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b). Izračunajmo $F(a)$ in $F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a)-g(a)) = 0\,, \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a)) = 0\,, \end{aligned}$$

Uporabimo Rolleov Izrek 3.24 na funkciji F, kar nam da

$$\exists\, c \in (a,b):\ F'(c) = 0\,.$$

Odvod funkcije F je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

in vrednost odvoda v točki c je enaka

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

oziroma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

■

Izrek 3.26. *(Lagrangeov izrek) Naj bo funkcija $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b). Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a,b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\,.$$

Dokaz. V Cauchyjevem Izreku 3.25 uporabimo funkcijo $g(x) = x$ (*glej Sliko 3.7*). ■

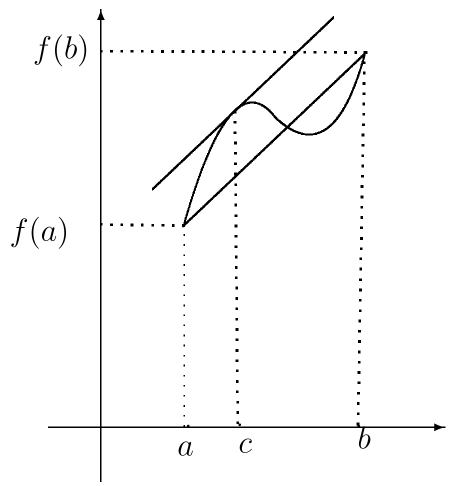
Lagrangeov Izrek 3.26 pravi, da na intervalu (a,b) obstaja točka c, v kateri je tangenta na graf funkcije f vzporedna daljici skozi točki $(a, f(a)$ in $(b, f(b))$.

Posledica 3.27. *Če je odvod funkcije $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ v vsaki točki enak 0, tedaj je funkcija konstantna.*

Dokaz. Izberimo poljubni točki $x_1, x_2 \in (a,b)$ in naj bo $x_1 < x_2$. Tedaj je $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva in po Lagrangeovem Izreku 3.26 obstaja $x_3 \in (x_1, x_2)$ takšna, da velja

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\,.$$

■



Slika 3.7: Lagrangeov izrek.

Posledica 3.28. *Če imata funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ v vsaki točki enak odvod, se razlikujeta kvečjemu za konstanto $C \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Odvod razlike funkcij f in g je enak

$$(f - g)' = f' - g' = 0$$

in po posledici 3.27 je $f - g = C \in \mathbb{R}$. ∎

3.6 Diferencial funkcije

Definirali bomo diferencial funkcije in pokazali nekaj primerov njegove uporabe.

Definicija 3.29. Diferencial funkcije df *je enak produktu*

$$df = f'(a)\,h\,.$$

Namesto df pišemo tudi dy in namesto h pišemo dx:

$$df = f'(a)\,dx \text{ ali } dy = f'(a)\,dx\,.$$

Torej velja

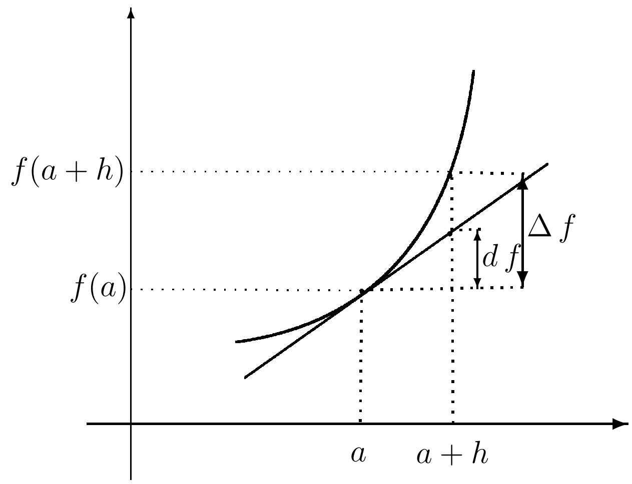
$$f'(a) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}\,.$$

Naj bo $\Delta f = f(a + h) - f(a)$, kjer je h majhno število. Tedaj je

$$\frac{\Delta f}{df} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,\frac{1}{f'(a)} \stackrel{h\to 0}{\to} 1\,.$$

Če je torej h majhno število, lahko vrednost funkcije f v točki $a+h$ aproksimiramo s pomočjo diferenciala (*glej Sliko 3.8*):

$$f(a+h) \approx f(a) + \underbrace{f'(a)\ h}_{diferencial\ df}\ .$$



Slika 3.8: Diferencial funkcije.

Primer 3.30. *Poiščimo* $\sqrt{98}$*.*

Nastavimo funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$ in $h = -2$. Tedaj je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in

$$\sqrt{98} = f(98) \approx f(100) + f'(100)(-2) = 9.9000\,.$$

Eksaktna vrednost je $\sqrt{98} = 9.8994$.

3.7 L'Hospitalovo pravilo

Spoznali bomo pomembno pravilo, ki zelo poenostavi izračun limite funkcije v primerih, ko gre za nedoločene izraza tipa

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty \quad \text{in} \quad 0^0\,.$$

(i) Nedoločenost tipa $\dfrac{0}{0}$

Obravnavamo $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Izrek 3.31. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v točki a sami). Denimo da sta funkciji g in g' na tej okolici različni od 0 (razen morda v točki a sami) in da je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.*

Če obstaja $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tedaj obstaja tudi $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki.

Dokaz. Izrek dokažemo s pomočjo Cauchyjevega Izreka 3.25, a se ne bomo spuščali v podrobnosti. ∎

Primer 3.32. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x \sin x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2 \cos x - x \sin x} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Vse ostale v uvodu naštete nedoločenosti lahko z enostavnimi algebrskimi prijemi prevedemo na izraz tipa $\frac{0}{0}$.

(ii) Nedoločenost tipa $0 \cdot \infty$

Obravnavamo $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na primer (i):

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\,.$$

Primer 3.33. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 0} x \cot x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x\, cot\, x &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{cot\, x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{tan\, x} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

(iii) Nedoločenost tipa $\infty - \infty$

Obravnavamo $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x))$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ in $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na primer (i):

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\frac{1}{f(x)}}\,.$$

Primer 3.34. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin\, x}{x\, \sin\, x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\, x}{\sin\, x + x\, \cos\, x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\, x}{2\, \cos\, x - x\, \sin\, x} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

(iv) Nedoločenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$

Obravnavamo $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Tudi sedaj bi lahko situacijo prevedli na primer (i):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\,.$$

Dejansko pa velja podoben izrek kot v primeru (i), kar poenostavi sam izračun limite.

Primer 3.35. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\ln x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\ln x} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2\sin x \cos x} \\
&= -\infty\,.
\end{aligned}$$

(v) Nedoločenosti tipa ∞^0 1^∞ in 0^0

Obravnavamo $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, kjer f in g v bližini točke a ustrezata zgoraj opisanim situacijam.

Vse tri situacije lahko prevedemo na primer (ii), če iskane limite najprej logaritmiramo, kar nam omogoča Izrek 2.44:

$$\ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} (g(x) \ln f(x))\,.$$

Poglejmo posamezne situacije:

$$\begin{aligned}
\infty^0 &: \ 0 \cdot \ln \infty \longmapsto 0 \cdot \infty \\
1^\infty &: \ \infty \cdot \ln 1 \longmapsto \infty \cdot 0 \\
0^0 &: \ 0 \cdot \ln 0 \longmapsto 0 \cdot (-\infty)\,.
\end{aligned}$$

Potem jih podobno kot v (ii) preoblikujemo na (i) ali (iv).

Primer 3.36. *Izračunajmo* $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$.

To je prvi tip zgoraj naštetih limit. Naj bo $A = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$. Izračunajmo

$\ln A$:

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x} \ln x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Rezultat moramo še antilogaritmirati

$$\ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1\,.$$

3.8 Taylorjeva formula

Taylorjeva formula nam omogoči, da dovolj krat odvedljive funkcije, ki lahko izgledajo zelo zakomplicirano, približno opišemo s pomočjo polinomov.

Definicija 3.37. *Naj bo f poljubna, večkrat odvedljiva funkcija in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je*

$$Q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n-ti Taylorjev polinom *za funkcijo f.*

Z nekaj premisleka opazimo, da velja:

$$\begin{aligned}
Q_n(a) &= f(a) \\
Q_n'(a) &= f'(a) \\
&\vdots \\
Q_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \\
Q_n^{(n+1)}(a) &\neq f^{(n+1)}(a)
\end{aligned}$$

Izrek 3.38. *(Taylorjeva formula) Naj bo funkcija f $n+1$-krat odvedljiva na odprtem intervalu I in naj bo $a \in I$. Za vsak $x \in I$ obstaja tak $\xi \in I$, ki leži med a in x, da je*

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dokaz. Definirajmo

$$r_n(x) = f(x) - Q_n(x) \quad \text{in} \quad p(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Najprej opazimo, da je $r_n(a) = p(a) = 0$. Večkratna zaporedna uporaba Cauchyjevega Izreka 3.25 da obstoj točk $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+1}$ takih, da velja

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(x)}{p(x)} &= \frac{r_n(x) - r_n(a)}{p(x) - p(a)} = \frac{r_n'(\xi_1)}{p'(\xi_1)} \\
&= \frac{r_n'(\xi_1) - r_n'(a)}{p'(\xi_1) - p'(a)} = \frac{r_n''(\xi_2)}{p''(\xi_2)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{r_n^{(n)}(\xi_n) - r_n^{(n)}(a)}{p^{(n)}(\xi_n) - p^{(n)}(a)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{p^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.
\end{aligned}$$

Označimo $\xi_{n+1} = \xi$ in upoštevajmo, da je $p^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$. Izračunajmo $(n+1)$-vi odvod funkcije r_n v točki ξ:

$$r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi).$$

Torej velja

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{r_n(x)}{p(x)} \\
&= \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{p^{(n+1)}(\xi)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

pri čemer ξ leži med a in x. ∎

Taylorjeva formula torej pravi

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots \\
&\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{r_n(x)}.
\end{aligned}$$

Funkcijo r_n imenujemo *ostanek Taylorjeve formule.* Če je f polinom, je $r_n(x) = 0$. Tedaj je

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \,.$$

Če je za neko funkcijo f izpolnjen pogoj

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \,,$$

namesto o Taylorjevi formuli govorimo o *Taylorjevi vrsti* in rečemo, da smo funkcijo f razvili v Taylorjevo vrsto.

Primer 3.39. *Razvijmo funkcijo e^x v Taylorjevo vrsto v okolici točke* 0.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \tfrac{x^5}{120} \\ &\quad + \tfrac{x^6}{720} + \tfrac{x^7}{5040} + \tfrac{x^8}{40320} + \tfrac{x^9}{362880} + \tfrac{x^{10}}{3628800} + r\left(x^{11}\right) \,. \end{aligned}$$

Primer 3.40. *Razvijmo funkciji* $\cos x$ *in* $\sin x$ *v Taylorjevo vrsto v okolici točke* 0 *do členov 10. reda.*

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} - \tfrac{x^7}{5040} + \tfrac{x^9}{362880} + r\left(x^{11}\right) \,, \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^6}{720} + \tfrac{x^8}{40320} - \tfrac{x^{10}}{3628800} + r\left(x^{11}\right) \,. \end{aligned}$$

3.9 Monotonost funkcij in lokalni ekstremi

V tem razdelku bomo videli vpliv odvoda na nekatere lastnosti realnih funkcij.

Monotonost funkcij

Ni težko videti, da so smerni koeficienti tangent naraščajoče funkcije nenegativni in ravno nasprotno velja za padajoče funkcije. To zvezo podaja naslednji izrek.

Izrek 3.41. *Naj bo funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Tedaj velja*

(i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ *strogo naraščajoča,*

(ii) $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ *naraščajoča,*

(iii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ *strogo padajoča,*

(iv) $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ *padajoča.*

Dokaz.

(i) Za poljuben par $x_1, x_2 \in (a, b)$, kjer je $x_1 < x_2$ je po Lagrangeovem izreku mogoče najti $x_3 \in (x_1, x_2)$ tak, da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3)\,.$$

Ker je $f'(x) > 0$ za vsak x, velja

$$f'(x_3) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0\,,$$

kar pomeni, da je f strogo naraščajoča.

(ii) ($\Rightarrow$) Pokažemo podobno kot (i).

($\Leftarrow$) Pokazati moramo, da če je f naraščajoča, tedaj je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Poglejmo diferenčni kvocient

$$D = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Za $h > 0$ je $D \geq 0$ in enako velja za $h < 0$. V vsakem primeru je diferenčni kvocient večji ali enak 0 in potemtakem tudi njegova limita in s tem odvod.

(iii),(iv) Pokažemo podobno kot prvi dve točki.

∎

Omenimo še primer, ki pokaže, zakaj v točki (i) ne velja ekvivalenca. Za funkcijo $f(x) = x^3$ velja, da je strogo naraščajoča, vendar je $f'(0) = 0$.

Primer 3.42. *Pokažimo, da je $f(x) = sh\, x$ strogo naraščajoča funkcija.*

$f'(x) = \mathrm{ch}\, x > 0$, zato je f strogo naraščajoča.

Lokalni ekstremi

Vemo že, da je $f'(a) = 0$ potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema v točki a, ne pa tudi zadosten. Čej je f 2-krat odvedljiva, lahko zadosten pogoj podamo s pomočja drugega odvoda.

Izrek 3.43. *Naj bo f 2-krat odvedljiva na neki okolici točke a in naj bo $f'(a) = 0$. Tedaj velja:*

(i) če je $f''(a) < 0$, tedaj ima f v točki a lokalni maksimum,

(ii) če je $f''(a) > 0$, tedaj ima f v točki a lokalni minimum.

Dokaz.

(i) Naj bo $f'(a) = 0$ in $f''(a) < 0$. Zaradi $f''(a) < 0$ je Po Izreku 3.41 funkcija f' strogo padajoča na neki okolici točke a, kar pomeni, da obstaja $\delta > 0$ tak, da

$$f'(x) > f'(a) = 0, \forall x \in (a - \delta, a) \quad \text{in}$$

$$f'(x) < f'(a) = 0, \forall x \in (a, a + \delta)\,.$$

To pomeni, da je na δ-okolici točke a f' na levi strani pozitiven, na desni pa negativen. Sledi, da je f na levi strani točke a strogo naraščajoča, na desni pa strogo padajoča, kar pomeni, da ima v a lokalni maksimum.

(ii) Pokažemo podobno kot točko (i).

■

Lahko se zgodi, da je v stacionarni točki tudi drugi odvod enak nič. Tedaj je odgovor na to, ali je v tej točki ekstrem, odvisen od predznaka višjih odvodov, a se pri tem ne bomo spuščali v podrobnosti.

Primer 3.44. *Poiščimo lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.*

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f''(x) = 12x^3 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0\,.$$

S pomočji Izreka 3.43 ne moremo odločiti, ali je v točki $x = 0$ ekstrem ali pa ga ni.

Omenimo še, kako iščemo minimume in maksimume na zaprtih intervalih. Na odprtem intervalu poiščmo lokalne ekstreme in poleg teh pregledamo še vrednosti v krajiščih intervala. V tem primeru govorimo o *globalnih ekstremih*.

Primer 3.45. *Poiščimo globalne ekstreme funkcije $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$.*

$$f'(x) = \cos x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{4}$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(\tfrac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow \text{lokalni maksimum}$$

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,.$$

Vrednosti v robovih definicijskega območja sta

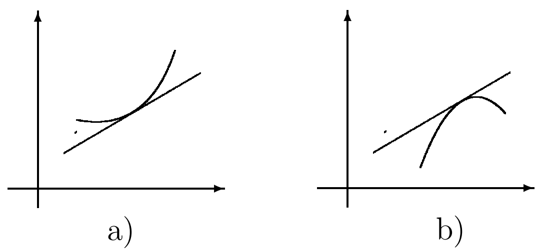
$$f(0) = 1 \quad \text{in} \quad f(\pi) = -1\,,$$

kar pomeni, da imamo v točki π globalni minimum, v točki $\frac{\pi}{4}$ pa globalni maksimum.

3.10 Konveksnost in konkavnost funkcij

Sdaj bomo nadaljevali v prejšnjem razdelku začeto zgodbo o vplivu odvoda na lastnosti funkcije.

Za uvod v definicijo konveksnosti in konkavnosti funkcije si poglejmo primere grafov funkcij na Sliki 3.9.



Slika 3.9: a) Konveksna in b) konkavna funkcija.

Definicija 3.46. *Odvedljiva funkcija f je* konveksna *na $[a,b]$ če tangenta v poljubni točki intervala leži pod grafom funkcije oziroma za vsak $x \in [a,b]$ velja*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\,,\; x_0 \in [a,b]\,.$$

Odvedljiva funkcija f je konkavna *na $[a,b]$ če tangenta v poljubni točki intervala leži nad grafom funkcije oziroma za vsak $x \in [a,b]$ velja*

$$f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\,,\; x_0 \in [a,b]\,.$$

Očitno velja, da je f konveksna natanko tedaj, ko je $-f$ konkavna.

Izrek 3.47. *(i) Če je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je funkcija f na intervalu $[a,b]$ konveksna.*

(ii) Če je $f''(x_0) < 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je funkcija f na intervalu $[a,b]$ konkavna.

Dokaz.

(i) Ker je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je f' (strogo) naraščajoča funkcija na (a,b). Izberimo točko x_0 na intervalu (a,b). Tedaj je $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ enačba tangente na graf funkcije f v točki x_0. Nadalje naj bo x poljubna točka na (a,b), različna od x_0. Po Lagrangeovem Izreku 3.26 obstaja med točkama x in x_0 točka x_1, za katero velja

$$f(x) = f'(x_1)(x-x_0)+f(x_0)\,.$$

Če je $x > x_0$, tedaj je $x_1 > x_0$ in ker je f' naraščajoča funkcija, je tudi $f'(x_1) > f'(x_0)$. Zato velja

$$\begin{aligned} f'(x_1) &> f'(x_0) && / \cdot (x - x_0) > 0 \\ f'(x_1)(x - x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) && / + f(x_0) \\ f'(x_1)(x - x_0) + f(x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ f(x) &> y\,. \end{aligned}$$

Če pa je $x < x_0$, tedaj je $x_1 < x_0$ in ker je f' naraščajoča funkcija, je tudi $f'(x_1) < f'(x_0)$. Zato velja

$$\begin{aligned} f'(x_1) &< f'(x_0) && / \cdot (x - x_0) < 0 \\ f'(x_1)(x - x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) && / + f(x_0) \\ f'(x_1)(x - x_0) + f(x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ f(x) &> y\,. \end{aligned}$$

Podobno velja v primeru, ko je $x_0 = a$ ali $x_0 = b$.

(ii) Dokažemo na analogen način kot točko (i).

∎

Primer 3.48. *Preučimo konveksnost oziroma konkavnost funkcij $f_1(x) = x^3$ in $f_2(x) = x^4$.*

Izračunajmo drugi odvod obeh funkcij:

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= 6\,x\,, \\ f_2''(x) &= 12\,x^2\,. \end{aligned}$$

To pomeni, da je f_1 za pozitivne vrednosti konveksna in za negativne konkavna, medtem ko je f_2 povsod konveksna.

Definicija 3.49. *Funkcija f ima v točki x* prevoj*, če obstaja taka okolica točke x, da je f na eni strani točke x konveksna, na drugi pa konkavna.*

Izrek 3.50. *Če odvedljiva funkcija v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema, ima v njej prevoj.*

Dokaz. Poglejmo samo idejo dokaza brez podrobnosti. Naj bo $f'(c) = 0$ in v c funkcija nima lokalnega ekstrema. Tedaj mora biti na eni strani točke c konveksna na drugi pa konkavna.

∎

3.11 Graf funkcije

Sedaj bomo združili pridobljeno znanje in poskušali čimnatančneje narisati graf funkcije.

Preden se lotimo risanja grafov funkcij, moramo povedati nekaj več o asimptotah funkcije.

Definicija 3.51. *Premica, podana z enačbo $x = a$, je* vertikalna asimptota *ali* pol *funkcije f, če je*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty \quad \textit{ali} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty\,.$$

Premica, podana z enačbo $y = kx + n$, je poševna asimptota *(če je $k \neq 0$) oziroma* horizontalna asimptota *(če je $k = 0$) funkcije f, če je*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - n) = 0 \quad \textit{ali} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - n) = 0\,.$$

(Kadar $x \to \infty$, govorimo o desni asimptoti*, za $x \to -\infty$ pa o* levi asimptoti*).*

Primer 3.52. *Poiščimo asimptote funkcij.*

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Poiščimo najprej desno asimptoto:

   $$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ n &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - 0\right) = 0\,. \end{aligned}$$

   Desna asimptota je tako premica $y = 0$ oziroma os x.

   Na podoben način izračunamo še levo asimptoto, ki je enaka desni.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2x + 1}$.

   Poiščimo desno asimptoto:

   $$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \\ n &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{2x + 1} - \frac{x}{2}\right) = \infty \end{aligned}$$

   Desna asimptota tako ne obstaja in na podoben način pokažemo, da tudi leva asimptota ne obstaja.

Brez dokaza navedimo trditev, ki nam pove, kdaj obstajajo asimptote funkcije f.

Trditev 3.53. *Graf funkcije f ima desno poševno oz. horizontalno asimptoto natanko tedaj, ko obstajata limiti*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \textit{in} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=n\,.$$

Graf funkcije f ima levo poševno oz. horizontalno asimptoto natanko tedaj, ko obstajata limiti

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \textit{in} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=n\,.$$

Poglejmo, kako narišemo graf funkcije. Poiščemo ali preverimo naslednje:

(i) definicijsko območje in preverimo sodost/lihost ter periodičnost funkcije,

(ii) ničle funkcije in po potrebi nekaj točk na grafu funkcije,

(iii) asimptote funkcije,

(iv) stacionarne točke in lokalne ekstreme,

(v) območja monotonosti in konveksnosti/konkavnosti funkcije.

Primer 3.54. *Skicirajmo graf funkcije $f(x)=xe^x$.*

3.12 Primer uporabe v kemiji

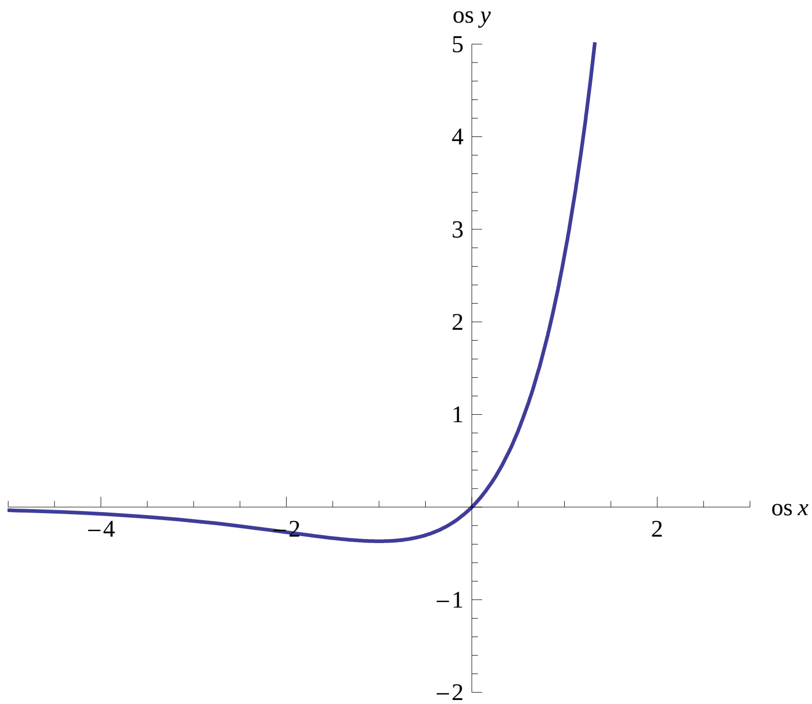
V želji, da osvojeno znanje približamo bralcu, si bomo pogledali konkretni primer uporabe odvoda v kemiji.

Splošna plinska enačba opisuje obnašanje idealnega plina in se glasi

$$pV=nRT\,,$$

pri čemer je

p	...	pritisk,
V	...	prostornina,
T	...	temperatura,
R	...	splošna plinska konstanta,
n	...	množina snovi.



Slika 3.10: Graf funkcije $f(x) = xe^x$.

O idealnem plinu govorimo, kadar zanemarimo velikost delcev, ki ga sestavljajo in njihovo medsebojno interakcijo. Posplošitev splošne plinske enačbe, ki upošteva velikost delcev in njihovo medsebojno interakcijo, je Van der Waalsova enačba stanja, ki jo je podal Johannes Diderik van der Waals v l. 1873 in opisuje relane pline. Glasi se

$$\left(p + \frac{n^2\,a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT\,,$$

pri čemer

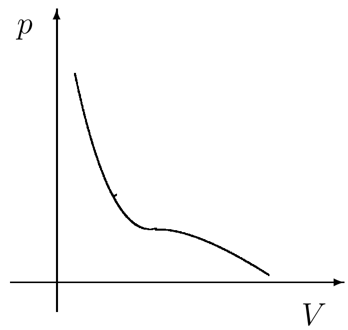
a	...	določa interakcijo med delci,
b	...	določa prostornino delcev v tekočini.

Parametra a in b sta odvisni od snovi, ki jo opisujemo.

Vsak realni plin lahko utekočinimo. To dosežemo s stiskanjem in/ali ohlajanjem, odvisno od posameznega plina. Za vsak plin obstaja temperatura, nad katero ga ne moremo utekočiniti. To temperaturo imenujemo *kritična temperatura* in jo označujemo T_c. Realni plin lahko utekočinimo le pod ali pri kritični temperaturi. Pritisk, ki ga za to potrebujemo, je *kritični pritisk* p_c in prostornina, ki ustreza T_c ter p_c, je *kritična prostornina* V_c. S skupno besedo T_c, p_c in V_c imenujemo *kritične konstante*.

Obstajajo plini, imenovani stalni plini, ki imajo kritično temperaturo pod sobno temperaturo. Če jih želimo utekočiniti, moramo te pline ohladiti do temperature pod njihovo T_c, kar pomeni, pod sobno temperaturo. To so na primer He, H_2, N_2, O_2, Ne, Ar, ... Poznamo pa veliko snovi, ki imajo T_c nad sobno temperaturo. Pri sobni temperaturi so te snovi v tekočem ali celo trdnem agregatnem stanju. Recimo voda ima T_c pri $647.1\,K$ (standardna sobna temperatura je $298.15\,K$). Vodo lahko utekočinimo pri poljubni temperaturi nižji od $T_c = 647.1\,K$. Nad temperaturo vrelišča vode, ki je $398.15\,K$, bi za ohranitev tekočega stanja vode morali delovati s pritiskom, ki bi bil višji od normalnega zračnega pritiska.

Za opis stanja snovi velikokrat uporabljamo $p-V$ diagram, kjer pritisk snovi p prikažemo kot funkcijo prostornine V, pri čemer je temperatura konstantna. To krivuljo imenujemo *izoterma* (*glej Sliko 3.11*).



Slika 3.11: $p-V$ diagram.

Iz $p-V$ diagrama je razvidno, da se plin utekočini v prevoju izoterme pri T_c, saj krivulja prehaja iz konveksne v konkavno. Točko prevoja imenujemo *kritična točka* in ustreza kritičnim konstantam. Računsko to pomeni, da moramo poiskati prvi in drugi odvod funkcije $p(V)$ in rešiti enačbi $p(V)' = 0$ in $p(V)'' = 0$.

Izrazimo najprej p kot funkcijo od V:

$$p(V) = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}\,.$$

Izračunamo oba odvoda, ju enačimo z 0 in rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} p'(v) &= \frac{-nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3} &= 0 \\ p''(v) &= \frac{2nRT}{(V-nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4} &= 0\,. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo z $\dfrac{2}{V-nb}$ in obe seštejmo:

$$\begin{aligned} \frac{4an^2}{V^3(V-nb)} - \frac{6an^2}{V^4} &= 0 \qquad\qquad / \cdot \frac{V^3}{2an^2} \\ \frac{2}{V-nb} &= \frac{3}{V} \\ 2V &= 3V - 3nb \\ V_c = V &= 3nb\,. \end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo T_c in p_c:

$$\begin{aligned}\frac{-nRT}{(3nb-nb)^2}+\frac{2an^2}{27n^3b^3} &= 0\\ \frac{RT}{4nb^2} &= \frac{2a}{27nb^3}\\ T_c = T &= \frac{8a}{27bR}\,.\end{aligned}$$

Ker poznamo kritično prostornino in temperaturo, lahko izračunamo še kritični pritisk:

$$\begin{aligned}p_c &= \frac{nR\frac{8a}{27bR}}{3nb-nb}-\frac{an^2}{9n^2b^2}\\ &= \frac{a}{27b^2}\,.\end{aligned}$$

3.13 Naloge

Odvod funkcije

1. Izračunaj odvode eksplicitno podanih funkcij:

   a) $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x - 1$,

   b) $f(x) = 3\sqrt[4]{x^3 + 2x}$,

   c) $f(x) = \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2 - \sin x}}$,

   d) $f(x) = 2\log_a(\cos x + 5x)$,

   e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$,

   f) $f(x) = (x^3 + \sqrt{x+1})^n$,

   g) $f(x) = (\tan(2x) + \frac{1}{\cos(2x)})$,

   h) $f(x) = \mathrm{acos}\frac{1}{x}$,

   i) $f(x) = 3^{x^2+5x}$,

   j) $f(x) = \ln(x^2 + \ln x)$,

   k) $f(x) = 2\mathrm{asin}\sqrt{1-2x}$,

   l) $f(x) = \sin(nx)\sin^n x$,

m) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{a}{x}} \cosh(bx)$,

n) $f(x) = \mathrm{atan}(\sin^2 - \cos^2)$.

2. Poišči odvod implicitno podanih funkcij:

   a) $x^2 + 2xy + 5 = 0$,

   b) $\mathrm{atan}\frac{x}{2y} = \ln x + 5y$.

3. Poišči enačbo tiste tangente na graf funkcije $y = x^2 - 6x$, ki je vzporedna premici 2x-4y=5. Poišči še enačbo pripadajoče normale na funkcijo.

4. Zapiši enačbo normale na graf funkcije $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$, ki je vzporedna premici $y = -2x + 1$.

5. Zapiši enačbo vseh tangent na graf funkcije $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$, ki so vzporedne premici $x + 2y + 3 = 0$.

6. Dani sta funkciji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ in $g(x) = ax^2$. Določi parameter a tako, da bo tangenta na graf funkcije f v točki $x = 1$ hkrati tangenta na graf funkcije g.

7. V kateri točki funkcije $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ oklepa tangenta z x-osjo kot $\frac{\pi}{4}$.

8. Izračunaj n-ti odvod funkcije $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

Uporaba odvoda

1. S pomočjo diferenciala izračunaj približne vrednosti za

   a) $\ln(0.9)$,

   b) $\cos 56°$,

   c) $\sqrt{8.76}$.

2. Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

   a) $\lim_{x\to\infty} x\mathrm{e}^x$,

   b) $\lim_{x\to\infty} x\mathrm{atan}\dfrac{1}{2x+1}$,

   c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3}$,

   d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$,

   e) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

3. Z uporabo logaritmiranja in L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

   a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}$,

   b) $\lim_{x\to 1}(\ln x)^{1-x}$,

   c) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. Razvij funkcijo $f(x) = \ln(2+x)\sin x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 do členov 3. reda.

5. Razvij funkcijo $f(x) = \ln(1+x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 in poišči njeno konvergenčno območje.

6. Načrtaj graf funkcije z upoštevanjem pomena prvih dveh odvodov:

   a) $f(x) = \frac{4}{x^2-4}$,

   b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 4$,

   c) $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$,

   d) $f(x) = x\ln^2 x$.

7. Poišči dve pozitivni števili, katerih vsota je 200, njun produkt pa je največji možen.

8. Izmed vseh ravokotnikov, ki jih lahko včrtamo v krog s polmerom r, poišči tistega z največjo ploščino.

9. Izmed vseh pravokotnikov z obsegom 12 poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

10. Dan je trikotnik s stranico $a = 1$ in obsegom $o = 6$. Določi preostali stranici trikotnika tako, da bo njegova ploščina največja.

11. Enakokrak trikotnik z obsegom 2 zavrtimo okoli osnovnice. Koliko naj merijo stranice trikotnika, da bo prostornina nastale vrtenine največja?

12. V enakokraki trikotnik včrtamo pravokotnik tako, da leži ena stranica pravokotnika na osnovnici trikotnika. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

13. *Zgraditi želimo silos v obliki valja, ki ima za streho polkroglo. Volumen silosa je $50l$. Cena kvadratnega metra pločevine za valj je 10 EUR/m^2 in za streho 15 EUR / m^2. Določi dimenzije silosa tako, da bo cena najnižja.

Poglavje 4

Integralni račun

4.1 Nedoločeni integral

V prejšnjem poglavju smo dani funkciji $f(x)$ poiskali odvod $f'(x)$ ali diferencial $df(x) = f'(x)dx$. Sedaj pa nas zanima obratno - kako dobiti iz znanega odvoda prvotno funkcijo.

Definicija 4.1. *Naj bo dana funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija F, za katero v vsaki točki iz $x \in D$ velja*

$$F'(x) = f(x)$$

se imenuje nedoločeni integral *funkcije f.*

Nedoločeni integral funkcije f označimo

$$\int f(x)\, dx\, .$$

Velja torej

$$\int f\, dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)\, .$$

Operacija, s katero poiščemo funkciji f njen nedoločeni integral, je *nedoločeno integriranje* funkcije f, simbol $\int$ je *integracijski znak*, f je *integrand*, diferencial $f(x)\, dx$ pa je *izraz pod integracijskim znakom.*

Primer 4.2. *Poiščimo nedoločeni integral funkcije $f(x) = 2x$.*

$$\begin{aligned} f(x) = 2x = F'(x) \quad &\Rightarrow \\ &F(x) = x^2 \vee F(x) = x^2 + 1 \vee F(x) = x^2 - 5 \vee \ldots \end{aligned}$$

Izrek 4.3. *Če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$, je njen nedoločeni integral tudi funkcija $F(x) + C$, kjer je C poljubna konstanta. Vsak nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je oblike $F(x) + C$.*

Dokaz. Ker je $F'(x) = f(x)$, je tudi $[F(x) + C]' = f(x)$. Torej je prvi del izreka dokazan.

Za dokaz drugega dela izreka naj bo $G(x)$ poljuben nedoločeni integral funkcije $f(x)$, torej naj velja $G'(x) = f(x)$. Pokazati moramo, da je $G(x) = F(x) + C$. Velja

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0\,.$$

Po posledici Lagrangeovega Izreka 3.27 je tedaj

$$G(x) - F(x) = C$$

oziroma

$$G(x) = F(x) + C\,.$$

∎

Izrek pove, da če poznamo odvod funkcije, ne poznamo natančno same funkcije, ampak je ta znana do aditivne konstante natančno. Od tod izvira ime nedoločeni integral. Konstanta C v izreku 4.3 se imenuje *integracijska konstanta*. Zato bomo nedoločeni integral funkcije $f(x)$ pisali

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

kjer velja $F'(x) = f(x)$ in je C poljubna konstanta.

Primer 4.4. *Poiščimo nedoločeni integral* $\int \cos x\,dx$.

$f(x) = \cos x = F'(x) \Leftrightarrow F(x) = \sin x + C\,.$

S sklepanjem kot v zgornjem primeru, lahko iz tabele odvodov elementarnih funkcij dobimo tabelo osnovnih integralov:

Tabela osnovnih integralov:

$\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$	$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \tan x\,dx = -\ln\|\cos x\| + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \cot x\,dx = \ln\|\sin x\| + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{asin}\frac{x}{a} + C$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln |\frac{a + x}{a - x}| + C,\ (|x| < a)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$ $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \,\text{atan}\, \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln |\frac{x - a}{x + a}| + C,\ (|x| > a)$

O veljavnosti formul se prepričamo tako, da z odvajanjem funkcije na desni strani dobimo integrand na levi strani. Pokažimo na primer

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{atan}\frac{x}{a} + C\,.$$

Preverimo z odvajanjem

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a}\,\text{atan}\,\frac{x}{a} + C\right)' &= \frac{1}{a}\,\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)' + 0 \\
&= \frac{1}{a^2}\frac{a^2}{x^2 + a^2} \\
&= \frac{1}{x^2 + a^2}\,.
\end{aligned}$$

4.2 Pravila za integriranje

Podobno kot poznamo pravila za odvajanje, poznamo pravila za integriranje. Osnovne lastnosti in enostavnejša pravila za integriranje izpeljemo kar iz ustreznih pravil za odvajanje. Je pa v splošnem problem integriranja težji kot problem odvajanja.

Trditev 4.5. *Integral vsote (razlike) dveh funkcij je vsota (razlika) integralov obeh členov:*

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx\,.$$

Dokaz. Naj bo $F_1(x) = \int f_1(x)\,dx$ in $F_2(x) = \int f_2(x)\,dx$. Ker je po definiciji nedoločenega integrala $F_i'(x) = f_i(x)$, $i = 1, 2$, od tod sledi

$$(F_1(x) \pm F_2(x))' = f_1(x) \pm f_2(x)$$

oziroma

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = F_1(x) \pm F_2(x) = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx\,.$$

∎

Pravilo lahko posplošimo na poljubno (končno) število členov:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)\,dx\,.$$

Trditev 4.6. *Če je funkcija pod integralskim znakom pomnožena s konstanto, smemo le-to nesti pred integralski znak*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$. Tedaj je

$$[k\,F(x)]' = k\,F'(x) = k\,f(x)$$

in integral funkcije $k\,f(x)$ je enak

$$\int k\,f(x)\,dx = k\,F(x) = k\int f(x)\,dx\,.$$

∎

Trditev 4.7. *(Uvedba nove spremenljivke) Naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral, obstaja tudi nedoločeni inegral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in velja*

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)\,dt\,.$$

Dokaz. Naj ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral $F(x)$, torej

$$\int f(x)\,dx = F(x)\,.$$

Če v F postavimo $x = x(t)$, dobimo novo funkcijo $G(t) = F(x(t))$. Po pravilu za verižno odvajanje velja

$$G'(t) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)\,,$$

torej res obstaja integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in je enak zvezi iz izreka. ∎

Primer 4.8. *Z uvedbo nove spremenljivke izračunajmo integrala.*

1. $\int \sin(5x)\,dx$.

   Integral izračunamo tako, da postavimo $5x = t$, tedaj je $x = \frac{1}{5}\,dt$ in $dx = \frac{dt}{5}$ in
$$\int \sin(5x)\,dx = \int \sin t\,\frac{1}{5}\,dt = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C\,.$$

2. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx\,.$

   Integral izračunamo tako, da postavimo $\tan x = t$. Tedaj je $\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt$ oziroma $dx = \cos^2 x\,dt$ in
$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{t}{\cos^2 x}\cos^2 x\,dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C\,.$$

V nadaljevanju si poglejmo metodo integracije po delih (*integratio per partes*).

To integracijsko metodo dobimo iz formule za odvajanje produkta. Naj bosta $u(x)$ in $v(x)$ odvedljivi funkciji. Odvod produkta je
$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,.$$
Torej je po definiciji nedoločenega integrala
$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx\,.$$
Od tod dobimo
$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$
oziroma krajše
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Integrand $u(x)v'(x)\,dx$ po zgornji formuli nadomestimo z integralom $\int u'(x)v(x)\,dx$. Metoda je uspešna, če je v zadnji enačbi integral na desni enostavnejši kot integral na levi. Torej je pri tej metodi pomembna pravilna izbira u-ja in dv-ja. Poglejmo nekaj zgledov.

Primer 4.9. *Z metodo integracije po delih izračunajmo integrala.*

1. $\int x \sin x \, dx$.

Integral izračunamo tako, da postavimo $u = x$ in $dv = \sin x \, dx$. Tedaj je $du = dx$ in $v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x$, zato

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + C \, .$$

2. $\int x^n \ln x \, dx \, , \quad n \in \mathbb{N}$.

Integral izračunamo tako, da postavimo $u = \ln x$ in $dv = x^n \, dx$. Tedaj je $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, zato

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C \, . \end{aligned}$$

4.3 Integracijske metode

Integriranje je bistveno težja naloga od odvajanja, saj integrala ni možno zmeraj izraziti s končnim številom elementarnih funkcij. V ta namen se moramo sistematično lotiti integracijskih metod.

Integriranje racionalnih funkcij

1. *Polinom* stopnje n ima obliko

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, ,$$

kjer so $a_0, a_1, ..., a_n$ dana števila in $a_n \neq 0$. Polinom integriramo členoma

$$\begin{aligned} &\int (a_n \, x^n + a_{n-1} \, x^{n-1} + \cdots + a_1 \, x + a_0 \,) \, dx \\ &= \frac{a_n}{n+1} \, x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} \, x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} \, x^2 + a_0 \, x + C \, . \end{aligned}$$

Primer 4.10. *Izračunajmo integral* $\int (3x^5 - 4x + 2) \, dx$.

$\int (3x^5 - 4x + 2) \, dx = \frac{x^6}{2} - 2x^2 + 2x + C \, .$

2. *Racionalna funkcija* je kvocient dveh polinomov, torej iščemo

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx\,,$$

kjer sta P_m in P_n polinoma.

Za integracijo racionalnih funkcij moramo vedeti nekaj o deljivosti polinomov. Dokaze navedenih trditev bomo izpustili, ker presegajo zahtevnost te skripte. Najdete jih lahko v [7].

Naj bosta $P_n(x)$ in $P_m(x)$ polinoma stopnje n in m in naj velja $m \geq n$. Tedaj po osnovnem izreku o deljenju polinomov [7] obstajata polinoma $Q(x)$ stopnje $m-n$ in $R(x)$ stopnje kvečjemu $n-1$ takšna, da velja

$$P_m(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)\,.$$

Na primer

$$x^3 + x^2 + 4x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3) + 3x\,.$$

Polinom $Q(x)$ je *celi del* kvocienta začetnih polinomov, $R(x)$ pa je *ostanek*. Kvocient je torej enak

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}\,.$$

Če je ostanek enak 0, pravimo, da je polinom P_m deljiv s polinom P_n. V primeru, ko je $m = n$, je Q konstanta. Ker polinom znamo integrirati, moramo obdelati le primer, ko je stopnja števca nižja od stopnje imenovalca. Iščemo torej

$$\int \frac{R(x)}{P_n(x)}\,dx\,,$$

kjer je stopnja polinoma R manjša od n. Naj bo

$$P_n(x) = (x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta \cdots (x-x_m)^\mu\,,$$

pri čemer je $\alpha + \beta + \cdots + \mu = n$ (lahko privzamemo, da je vodilni koeficient enak 1). Racionalno funkcijo $\dfrac{R(x)}{P_n(x)}$ lahko razstavimo na vsoto *parcialnih* ali *delnih ulomkov.*

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{P_n(x)} \quad &= \quad \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} \\
&+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{M_1}{x-x_m} + \frac{M_2}{(x-x_m)^2} + \cdots + \frac{M_\mu}{(x-x_m)^\mu}\,.
\end{aligned}$$

Pri tem so $A_1, A_2, ..., A_\alpha, B_1, B_2, ..., B_\beta, ..., M_1, M_2, ..., M_\mu$ konstante.

Lahko se zgodi, da je katera od ničel polinoma P_n kompleksna. Naj bo torej $x_1 = \alpha + i\beta$ kompleksna ničla. Tedaj je tudi $\overline{x_1} = \alpha - i\beta$ kompleksna ničla polinoma P_n. Izkaže se, da lahko pripadajoča parcialna ulomka zapišemo kot

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - \overline{x_1}} = \frac{A_1}{x - \alpha - i\beta} + \frac{\overline{A_1}}{x - \alpha + i\beta} = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q},$$

kjer je $p = -2\alpha$ in $q = \alpha^2 + \beta^2$, B in C pa sta realni konstanti, pri čemer je $B = 2\mathcal{R}e(A_1)$ in $C = -2\mathcal{R}e(A_1\,\overline{x_1})$. V primeru večkratne kompleksne ničle postopamo podobno kot pri večkratni realni ničli.

V razcepu racionalne funkcije na parcialne ulomke se pojavita dva tipa izrazov in sicer

$$\frac{A}{(x-c)^l} \qquad \text{in} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k},$$

pri čemer je $x^2 + px + q$ nerazcepni polinom.

Primer 4.11. *Poiščimo nastavek za razcep funkcije na parcialne ulomke*

$$\frac{3x + 1}{(x+1)^3(x-4)(x^2+1)^2}$$

na parcialne ulomke.

$$\begin{aligned}\frac{3x + 1}{(x+1)^3(x-4)(x^2+1)^2} &= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{B}{x-4} \\ &\quad + \frac{C_1\,x + D_1}{x^2+1} + \frac{C_2\,x + D_2}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Izračun neznanih konstant, ki jih imenujemo tudi *nedoločeni koeficienti*, privede do reševanja sistema linearnih enačb. Metodo bomo prikazali na primeru.

Primer 4.12. *Razstavimo na parcialne ulomke funkcijo*

$$\frac{x^2 + x + 4}{(x^2+2)(x-1)}.$$

Imenovalec je že razstavljen na linearne faktorje. Nastavek je

$$\frac{x^2 + x + 4}{(x^2+2)(x-1)} = \frac{Ax + B}{x^2+2} + \frac{C}{x-1}.$$

Najprej odpravimo ulomke, torej pomnožimo obe strani z najmanjšim skupnim imenovalcem $(x^2+2)(x-1)$ in dobimo

$$x^2 + x + 4 = x^2(A + C) + x(-A + B) - B + 2C.$$

Če hočemo, da bosta obe strani enaki, morajo biti koeficienti pri enakih potencah spremenljivke x enaki. Od tod sledijo enačbe

$$A + C = 1$$

$$-A + B = 1$$

$$-B + 2C = 4\,.$$

Rešitev teh enačb je

$$A = -1,\ B = 0,\ C = 2\,.$$

Razcep na parcialne ulomke je

$$\frac{x^2 + x + 4}{(x^2 + 2)(x - 1)} = \frac{-x}{x^2 + 2} + \frac{2}{x - 1}\,.$$

Primer 4.13. *Razstavimo na parcialne ulomke funkcijo*

$$\frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1}\,.$$

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} &= \frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{x^3(x - 1) - (x - 1)} \\
&= \frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{(x - 1)(x^3 - 1)} \\
&= \frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} \\
&= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}\,.
\end{aligned}$$

Na podoben način kot v prejšnjem primeru izračunamo konstante

$$A = C = D = 1,\ B = 2\,.$$

Integral racionalne funkcije je torej vsota integrala polinoma in integralov parcialnih ulomkov oblike

$$\frac{A}{(x - c)^k} \qquad \text{in} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}\,,$$

pri čemer je $k \geq 1$ in $x^2 + px + q$ nerazcepni polinom. Če bomo znali izračunati integrale parcialnih ulomkov, bomo znali integrirati celotno racionalno funkcijo. Poglejmo posamezne možnosti.

(i) *Realna in enkratna ničla*

$$\int \frac{A}{(x-c)}\,dx = A\ln|x-c| + C\,.$$

(ii) *Realna in večkratna ničla*

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,dx = \frac{A}{k-1}(x-c)^{-k+1} + C = \frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-c)^{k-1}} + C,\ k>1\,.$$

(iii) *Kompleksna in enkratna ničla*

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+p\,x+q}\,dx$$

Imenovalec, ki je nerazcepni polinom z diskrimanto $D = p^2 - 4q < 0$, zapišemo v obliki popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= (x+\tfrac{p}{2})^2 + q - \tfrac{p^2}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + \tfrac{4q-p^2}{4} \\ &= (\tfrac{x+p}{2})^2 + \tfrac{-D}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{-D}}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = x + \frac{p}{2}$, tedaj je $dx = dt$. Izračunajmo najprej

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+p\,x+q}\,dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2}\,dx \\ &= \int \frac{1}{t^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2} dt \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{-D}}{2}}\,\mathrm{atan}\frac{t}{\frac{\sqrt{-D}}{2}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C\,. \end{aligned}$$

Za izračun prvotnega integrala upoštevajmo zvezo

$$[\ln f(x)]' = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

oziroma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C\,.$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx \\
&= \tfrac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+p\,x+q}\,dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} \\
&= \tfrac{A}{2}\ln(x^2+p\,x+q) + (B-\tfrac{Ap}{2})\tfrac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\tfrac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C\,.
\end{aligned}
$$

Primer 4.14. *Izračunajmo integral*

$$
\int \frac{x^2+x+4}{(x^2+2)(x-1)}\,dx\,.
$$

V Primeru 4.12 smo že razstavili funkcijo na parcialna ulomka, ki ju sedaj integriramo.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+4}{(x^2+2)(x-1)}\,dx &= \int \frac{-x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \\
&= \int \frac{-(x\,2)\,\frac{1}{2}}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + 2\ln|x-1| + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}} + C\,.
\end{aligned}
$$

(iv) *Kompleksna in večkratna ničla*

$$
\int \frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx,\; D=p^2-4q<0,\; k>1
$$

Integral razdelimo na dva integrala:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2\,x+p)+\frac{2\,B-A\,p}{2}}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2\,x+p}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx + \frac{2\,B-A\,p}{2}\int \frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^k}
\end{aligned}
$$

Prvega izračunamo podobno kot prej:

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{A}{2}(2\,x+p)}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx &= \tfrac{A}{2}\int \frac{dt}{t^k}\\ &= -\frac{A}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+p\,x+q)^{k-1}}\,.\end{aligned}$$

Za drugega pa uporabimo rekurzivno formulo:

$$\begin{aligned}\tfrac{2\,B-A\,p}{2}\int \frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^k} &= \tfrac{2\,B-A\,p}{2}\Bigg[\tfrac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})(x^2+p\,x+q)^{k-1}}\\ &\quad +\tfrac{2k-3}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}\Bigg]\,.\end{aligned}$$

Primer 4.15. *Izračunajmo nedoločeni integral*

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}\,dx\,.$$

Nastavek za razcep na parcialne ulomke je enak

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Rešitev sistema linearnih enačb je

$$A=1,\; B=-1,\; C=-2,\; D=-3,\; E=-4\,.$$

Izračunajmo posamezne integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-2} &= \ln|x-2|\,,\\ \int \frac{-x-2}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{-\frac{1}{2}(2x)-2}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\mathrm{atan}x\,,\\ \int \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{-\frac{3}{2}(2x)-4}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}-4\left[\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{atan}x\right]\,.\end{aligned}$$

Razultat je

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}\,dx = \ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}-4\mathrm{atan}x+\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+C\,.$$

Primer 4.16. *Izračunajmo nedoločeni integral*

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1}\, dx\,.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx \\
&= \ln(|x-1|\sqrt{x^2+x+1}) - \frac{2}{x-1} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{atan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.
\end{aligned}$$

Videli smo, da lahko izračunamo integral vsake racionalne funkcije. Kadar ima imenovalec racionalne funkcije večkratne ničle (realne ali kompleksne), lahko uporabimo *metodo Ostrogradskega*, s katero lahko (z večkratno uporabo) prevedemo integracijo na primer, ko ima imenovalec samo enkratne ničle.

Naj bo imenovalec $P(x)$ racionalne funkcije $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ oblike

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n} \\
&\quad \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m}\,,
\end{aligned}$$

pri čemer so vsi kvadratni polinomi nerazcepni.

Razstavimo ga na faktorja $P_1(x)$ in $P_2(x)$, kjer je $P_1(x)$ produkt vseh faktorjev v $P(x)$ v prvi potenci

$$P_1(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_mx+q_m)$$

in zato

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n-1}\cdot \\
&\quad \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\beta_m-1}\,.
\end{aligned}$$

Integral zapišemo v obliki

$$\int \frac{R(x)}{P(x)}\, dx = \frac{R_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{R_2(x)}{P_2(x)}\, dx\,,$$

kjer sta R_1 in R_2 polinoma z nedoločenimi koeficienti za eno stopnjo nižja od stopnje polinomov P_1 in P_2.

Celoten izraz odvajamo

$$\begin{aligned}\left(\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx\right)' &= \left(\frac{R_1(x)}{P_1(x)}\right)' + \left(\int \frac{R_2(x)}{P_2(x)}\,dx\right)' \\ \frac{R(x)}{P(x)} &= \left(\frac{R_1(x)}{P_1(x)}\right)' + \frac{R_2(x)}{P_2(x)}\,.\end{aligned}$$

Zatem odpravimo ulomke in z enačenjem istoležnih koeficientov na obeh straneh identitete dobimo sistem linearnih enačb za neznane koeficiente iz polinomov R_1 in R_2. Dobljeni sistem ima vedno enolične rešitve. Z rešitvijo sistema linearnih enačb prevedemo začetni integral na integral racionalne funkcije s koreni, ki imajo za ena nižjo stopnjo.

Primer 4.17. *Z metodo Ostrogradskega izračunajmo nedoločeni integral*

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Nastavek je enak

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,dx\,.$$

Z odvajanjem dobimo

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(Ax^2+2Bx-A)}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem:

$$1 = -Ax^2 - 2Bx + A + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D$$

oziroma

$$1 = Cx^3 + x^2(D-A) + x(C-2B) + A + D\,.$$

Istoležni koeficienti na obeh straneh identitete morajo biti enaki, zato dobimo sistem enačb, katerega rešitev je

$$A = D = \frac{1}{2},\ B = C = 0\,.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{atan} x + C\,.\end{aligned}$$

Integriranje funkcij s sinusom in kosinusom

Poglejmo si nekaj tipičnih primerov.

(i) $\int \sin^m x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$

a) Če je m liho število večje od 1, torej $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, je možno integrand zapisati v obliki

$$\sin^m x = (1-\cos^2 x)^k \sin x\,.$$

Z uvedbo nove spemenljivke $\cos x = t$ prevedemo primer na integral polinoma.
V drugem primeru zapišemo

$$\cos^m x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$$

in uvedemo $\sin x = t$.

b) Če je m sodo število, torej $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, uporabimo zvezo

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$

S tem se stopnja eksponenta zniža za polovico. Dokler je eksponent sodo število, postopek ponavljamo, ko pa pridemo do lihega eksponenta uporabimo točko a).
V drugem primeru uporabimo zvezo

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}\,.$$

Primer 4.18. *Izračunajmo* $\int cos^4 x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \tfrac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx \\
&= \int \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Če je vsaj en eksponent lih, postopamo tako kot v (i.a), sicer pa uporabimo postopek iz (i.b).

Primer 4.19. *Izračunajmo integrala.*

1. $\int cos^3 x \sin^3 x\, dx$.

$$\begin{aligned} \int cos^3 x \sin^3 x\, dx &= \int \sin^5 x \cos x\, dx \\ &= \frac{1}{6}\sin^6 x + C\,. \end{aligned}$$

2. $\int cos^2 x \sin^2 x\, dx$.

$$\begin{aligned} \int cos^2 x \sin^2 x\, dx &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{4}(1-\cos^2(2x))\, dx \\ &= \int \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\, dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + C\,. \end{aligned}$$

(iii) $\int \sin(ax)\cos(bx)\, dx,\ \int \sin(ax)\sin(bx)\, dx,\ \int \cos(ax)\cos(bx)\, dx,\ a, b \in \mathbb{R}$

Zanima nas samo primer, ko je $a \neq b$, ker imamo sicer primer iz točke (ii). Uporabimo formule

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin((a-b)x) + \sin((a+b)x)],$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}[(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)],$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[(\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)],$$

v veljavnost katerih se lahko prepričamo z uporabo adicijskih izrekov (glej [2]).

Primer 4.20. *Izračunajmo integrala.*

1. $\int \cos(3x)\sin x\, dx$.

$$\begin{aligned} \int \cos(3x)\sin x\, dx &= \int \frac{1}{2}(\sin(-2x) + \cos(4x)) \\ &= \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x) + C\,. \end{aligned}$$

2. $\int \cos(2x)\cos(4x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)\cos(4x)\,dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(2x)+\cos(6x)) \\ &= \frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{12}\sin(6x)+C\,.\end{aligned}$$

(iv) $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = I,\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx = J,\ a,b\in \mathbb{R}$

Integriramo po delih $u = e^{ax}$, $dv = \sin(bx)\,dx$. Potem je $du = ae^{ax}\,dx$ in $v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$ in

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx)+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx)+\frac{a}{b}J\,.$$

Podobno

$$J = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx)-\frac{a}{b}I$$

od koder sledi

$$J = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx)+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx)-\frac{a^2}{b^2}J\,.$$

Zato velja

$$J = e^{ax}\frac{b\sin(bx)+a\cos(bx)}{a^2+b^2}+C$$

in

$$I = e^{ax}\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}+C\,.$$

(iv) *Univerzalna subsitucija* za $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$, kjer je $R(u,v)$ racionalna funkcija

Vpeljemo novo spremenljivko $t=\tan\frac{x}{2}$. Tedaj je

$$x = 2\,\mathrm{atan}\,t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

Nadalje velja

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(2\,\tfrac{x}{2}) = 2\,\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\tan\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2} \\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,t}{1+t^2}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos(2\,\tfrac{x}{2}) = \cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2} = \cos^2\tfrac{x}{2}(1-\tan^2\tfrac{x}{2}) \\ &= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.\end{aligned}$$

Primer 4.21. *Izračunajmo* $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2\,t}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \ln(tan\tfrac{x}{2}) + C\,.\end{aligned}$$

Integriranje funkcij pod korenskim znakom (iracionalnih funkcij)

(i) $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx,\ \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}}$

V obeh primerih uvedemo novo spremenljivko $t = ax + b$. Tedaj je $dt = a\,dx$ in

$$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \frac{1}{a}\int t^{\frac{m}{n}}\,dt$$

in

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}} = \frac{1}{a}\int t^{\frac{-m}{n}}\,dt\,.$$

Oba integrala že znamo izračunati.

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$

Preoblikujeno izraz pod korenom

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

in uvedemo novo spremenljivko $t = x + \frac{p}{2}$. S tem dobimo enega od osnovnih integralov:

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{ali} \quad \int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.$$

Primer 4.22. *Izračunajmo* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}\\ &= \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C\,.\end{aligned}$$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$

Podobno kot prej preoblikujemo izraz pod korenom:

$$-x^2+px+q = -(x-\frac{p}{2})^2 + \frac{4q+p^2}{4}$$

in uvedemo novo spremenljivko $t = x - \frac{p}{2}$, s čimer dobimo osnovni integral

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,.$$

Primer 4.23. *Izračunajmo* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}\\ &= asin\tfrac{x+1}{2} + C\,.\end{aligned}$$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Izpostavimo $\dfrac{1}{\sqrt{|a|}}$, s čimer prevedemo primer na enega od prejšnjih dveh primerov.

Primer 4.24. *Izračunajmo* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x}}\,dx &= \int \frac{dx}{2\sqrt{1-(x-1)^2}}\\ &= \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= -asin(x-1) + C\,.\end{aligned}$$

(v) $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Tu je $P_n(x)$ poljuben polinom stopnje n. Ta tip integrala zahteva poseben nastavek

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

Pri tem je $Q(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu $n-1$ in D neznana konstanta. Koeficiente polinoma $Q(x)$ in konstanto D določimo tako, da najprej nastavek odvajamo, nato odpravimo ulomke in enačimo istoležne koeficiente na levi in desni strani. Metodo si poglejmo na Primeru 4.25.

Primer 4.25. *Izračunajmo* $\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= (Ax+B)\sqrt{1-x^2}+C\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} && /' \\
\frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}} &= A\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x(Ax+B)}{2\sqrt{1-x^2}}+C\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
x^2-2x &= x^2(-2A)+x(-B)+A+C && \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$A=-\tfrac{1}{2},\ B=2,\ C=\tfrac{1}{2}\,.$$

Integral je tako enak

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= (-\frac{x}{2}+2)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}((4-x)\sqrt{1-x^2}+asin\,x)+D\,.
\end{aligned}$$

4.4 Določeni integral

Definirali bomo določeni integral, ki zaenkrat s prejšnjim razdelkom nima skupnega prav ničesar razen podobnosti v imenu.

Naj bo $[a,b]$ poljuben zaprti interval in f neka omejena funkcija na tem intervalu. Množica točk $D=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ je *delitev* intervala $[a,b]$, če je

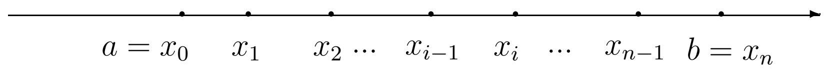
$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b\,.$$

Delitev intervala vidimo na Sliki 4.1. Dolžina i-tega intervala je

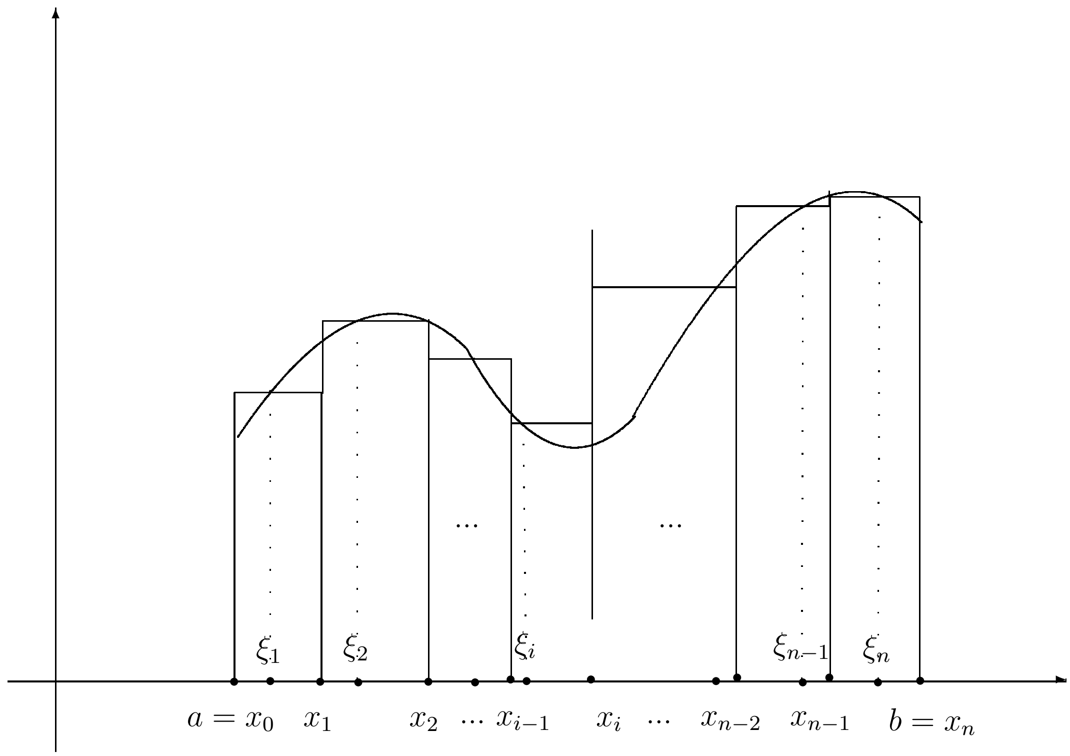
$$d_i=x_i-x_{i-1}\,,\ \ i=1,...,n\,.$$

Velja $d_1+d_2+...+d_n=x_n-x_0=b-a$. Označimo $d=\max\{d_1,d_2,...,d_n\}$. Na vsakem podintervalu $[x_{i-1},x_i]$ izberimo poljubno točko ξ_i. Vsoto

$$R_f(D)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)d_i$$



Slika 4.1: Delitev intervala $[a, b]$.



Slika 4.2: Riemannova integralska vsota.

imenujemo *Riemannova integralska vsota* funkcije f za delitev D intervala $[a, b]$ (*glej Sliko 4.2*). Dani delitvi D pripada v splošnem veliko različnih integralskih vsot, ker izbiramo točke na podintervalih poljubno.

Definicija 4.26. *Če obstaja limita*

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) d_i \,,$$

potem število I imenujemo določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ in označimo

$$\int_a^b f(x)\, dx \,.$$

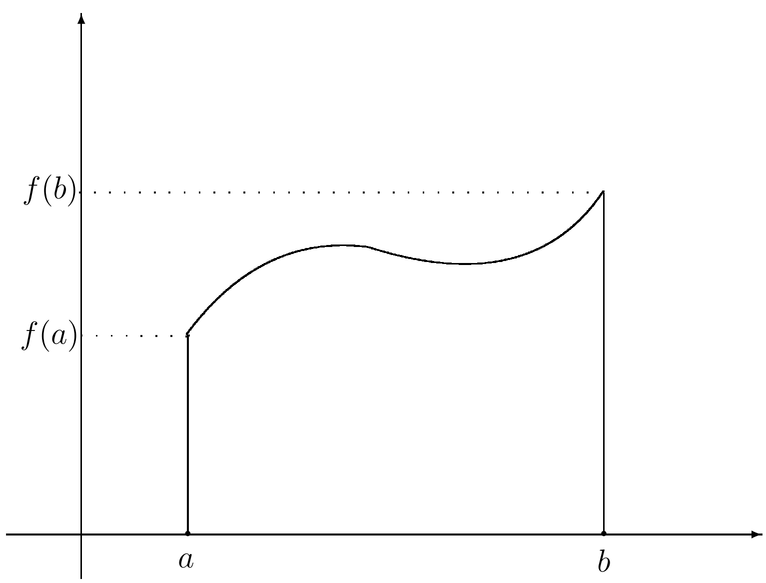
To pomeni, da je število I določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, če se od njega ločijo vse integralske vsote funkcije f za vse zadosti drobne delitve poljubno malo.
Funkcijo, za katero obstaja določeni integral na intervalu $[a, b]$, imenujemo *integrabilna* na tem intervalu. Interval $[a, b]$ je *integracijski interval*, število a je *spodnja meja*, število b pa *zgornja meja* integrala.

Povezavo med zveznostjo in integrabilnostjo podaja naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali.

Izrek 4.27. *Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna, je na njem tudi integrabilna.*

Poglejmo najprepostejšo uporabo določenega integrala oziroma njegov geometrijski pomen. V nadaljevanju bomo spoznali še nekaj drugih primerov uporabe določenega integrala. Naj bo f integrabilna na $[a, b]$ in nenegativna. Lik, določen z $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$, imenujemo *krivočrtni trapez* T, katerega ploščino bomo označili p_T in ga vidimo na Sliki 4.3. Z večanjem števila delilnih točk delitve D intervala $[a, b]$ Riemannova integralska vsota $R_f(D)$ konvergira k ploščini p_T, zato je

$$\int_a^b f(x)dx = p_T\,.$$



Slika 4.3: Krivočrtni trapez.

Naj bo sedaj integrabilna funkcija f na $[a, b]$ negativna. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b (-f(x))dx = -p_T\,.$$

V nadaljevanju si poglejmo nekaj lastnosti določenega itegrala.

Izrek 4.28. *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji ter c in d poljubni konstanti. Tedaj je na $[a, b]$ integrabilna tudi funkcija $cf(x) + dg(x)$ in*

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Naj bo D poljubna delitev intervala $[a, b]$ na n podintervalov. Tedaj je integralska vsota

$$\begin{aligned} R_{cf+dg}(D) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}[cf(\xi_i) + dg(\xi_i)]d_i \\ &= c\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)d_i + d\textstyle\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)d_i \\ &= cR_f(D) + dR_g(D)\,. \end{aligned}$$

Če je delitev D dovolj drobna, se leva stran enakosti poljubno majhno loči od števila $\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,dx$, desna pa od števila $c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx$. ∎

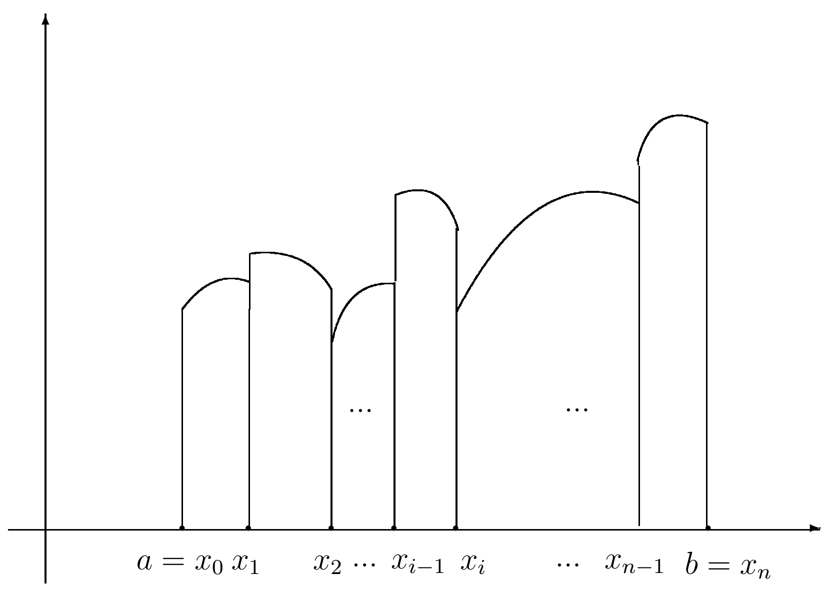
Izrek je mogoče posplošiti na več členov, kar lahko dokažemo z indukcijo po n:

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f_k(x)\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Definicija 4.29. *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je* odsekoma zvezna*, če obstaja taka delitev intervala*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b\,,$$

da na vsakem intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ obstaja taka zvezna funkcija $f_i(x)$, da je $f(x) = f_i(x)$ za vsak $x \in (a_{i-1}, a_i)$ (glej Sliko 4.4).



Slika 4.4: Odsekoma zvezna funkcija.

Če je f odsekoma zvezna, tedaj je zvezna povsod razen v končno mnogo točkah. Tudi za odsekoma zvezne funkcije velja, da so integrabilne.

Izrek 4.30. *Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ odsekoma zvezna in c katerokoli število med a in b, je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Ker je funkcija f odsekoma zvezna na $[a, b]$, je taka tudi na intervalih $[a, c]$ in $[c, b]$, zato obstajajo vsi trije pripadajoči integrali. Vzemimo tako delitev $D = x_0, ..., x_n$ intervala $[a, b]$, da je c ena od delilnih točk. Naj bo $c = x_m$, $0 < m < n$. Tedaj lahko zapišemo integralsko vsoto kot

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)d_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)d_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)d_i\,.$$

Za dovolj drobno delitev D limitirajo integralske vsote k identiteti iz izreka. ∎

Tudi ta izrek je mogoče posplošiti na več členov, kar dokažemo z indukcijo po n:

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx\,.$$

Izrek 4.31. *Če v integralu zamenjamo meji, dobi integral nasproten predznak:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Dokaz. Če zamenjamo meji, je treba v integralski vsoti nadomestiti $d_i = x_i - x_{i-i}$ z $-d_i = x_{i-1} - x_i$, zato dobi vsaka integralska vsota samo nasproten predznak in integral, ki je limita integralskih vsot, prav tako. ∎

Posledica 4.32.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Dokaz.

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

∎

Lema 4.33. *Naj bo f integrabilna na $[a, b]$ in naj bosta m in M natančni spodnja in zgornja meja funkcije f na $[a, b]$. Tedaj je*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Izberimo poljubno točko ξ_i na vsakem od pointervalov $[x_{i-1}, x_i]$. Tedaj velja:

$$\begin{array}{ccccc}
m & \leq & f(\xi_i) & \leq & M \\
m\, d_i & \leq & f(\xi_i)\, d_i & \leq & M\, d_i \\
\sum_{i=1}^n m\, d_i & \leq & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\, d_i & \leq & \sum_{i=1}^n M\, d_i \\
m \sum_{i=1}^n d_i & \leq & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\, d_i & \leq & M \sum_{i=1}^n, d_i \\
m(b-a) & \leq & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\, d_i & \leq & M(b-a) \\
m(b-a) & \leq & R_f(D) & \leq & M(b-a)
\end{array}$$

Ker je f integrabilna, je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)\,.$$

■

Izrek 4.34. *(O srednji vrednosti) Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja na intervalu $[a, b]$ integrabilne funkcije f. Tedaj obstaja taka vrednost c med m in M, da je*

$$\int_a^b f(x) = c(b-a)\,.$$

Če pa je funkcija f tudi zvezna, je $c = f(\xi)$ za neki $\xi \in [a, b]$.

Dokaz. Iz leme 4.33 neposredno sledi

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

in prvi del je dokazan. Drugi del izreka sledi iz tega, da zvezna funkcija zavzame vse vrednosti med m in M. ■

Število c imenujemo *srednja vrednost* funkcije f na intervalu $[a, b]$, zato ta izrek imenujemo *izrek o srednji vrednosti.*

Poglejmo še nekaj lastnosti določenega integrala, ki jih ne bomo dokazovali.

Trditev 4.35. *(i) Če je f integrabilna na intervalu $[a, b]$, je $|f|$ prav tako integrabilna na tem intervalu in velja*

$$\left| \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,.$$

(ii) Če sta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji in je $g(x) \geq f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je

$$\int_a^b g(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

V posebnem, ko je $f(x) = 0$ na $[a, b]$, dobimo

$$\int_a^b g(x)\, dx \geq 0\,.$$

4.5 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

V tem razdelku bomo našli povezavi med prejšnjima dvema razdelkoma, ki sta bila na videz precej nepovezana.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Zamenjajmo konstantno zgornjo mejo b v določenem integralu $\int_a^b f$ s spremenljivko $x \in [a, b]$ ter definirajmo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,.$$

V tem primeru ne moremo vpeljati x kot integracijske spremenljivke, saj smo x fiksirali, zato pišemo na primer t.

Izrek 4.36. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je njen določeni integral $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in [a, b]$, odvedljiva funkcija in velja $F' = f$.*

Dokaz. Izberimo poljubni točki x in $x + h$ iz intervala $[a, b]$. Ker je

$$F(x + h) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt$$

je

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt\,.$$

Ker je f zvezna, izrek o srednji vrednosti pove, da za vsak h obstaja točka $\xi \in [x, x + h]$ taka, da je

$$F(x + h) - F(x) = f(\xi)h$$

oziroma

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(\xi)\,.$$

(Pri tem velja $m \leq f(\xi) \leq M$, kjer sta m in M natančni meji funkcije f na $[a, b]$.)

Opazimo, da če gre h proti 0, gre ξ proti x in ker je f zvezna funkcija, je

$$\lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

in zato

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,.$$

■

Posledica 4.37. *Nedoločeni integral zvezne funkcije f obstaja.*

Dokaz. To je ravno funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. ■

Posledica 4.38. *(Newton-Leibnizova formula) Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je F nedoločeni integral funkcije f, potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Dokaz.

1. Naj bo $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Tedaj je

   $$F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{in} \qquad F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

   Torej je

   $$\int_a^b f(t)\,dt = F_0(b) - F_0(a)\,.$$

   Po prejšnjem izreku je F_0 nedoločeni integral funkcije f. Torej smo Newton-Leibnizovo formulo dokazali za en nedoločeni integral, namreč za funkcijo F_0.

2. Naj bo $F(x)$ nek nadaljni nedoločni integral funkcije f. Tedaj obstaja taka konstanta C, da je

   $$F(x) = F_0(x) + C, \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

   Torej velja

   $$F(b) - F(a) = (F_0(b) + C) - (F_0(a) + C) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

■

Pogosto namesto $F(b) - F(a)$ uporabljamo zapis

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b\,.$$

Poglejmo vpliv vpeljave nove spremenljivke in integracije po delih na meje v določenem integralu.

Trditev 4.39. *(Uvedba nove spremenljivke) Naj bo f zvezna funkcija in $x = x(t)$ zvezno odvedljiva funkcija. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)\,dt\,,$$

kjer je $x(t)$ zvezno odvedljiva funkcija ter velja $a = x(c)$ in $b = x(d)$.

Dokaz. Naj bo F nedoločeni integral funkcije f (ta obstaja, ker je f zvezna). Tedaj je

$$[F(x(t))]' = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)\,.$$

Newton-Lebnizova formula pove, da je

$$\int_c^d f(x(t))x'(t) = F(x(t))|_c^d = F(x(d)) - F(x(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

∎

Primer 4.40. *Izračunajmo določeni integral*

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,\ a > 0$$

z vpeljavo nove spremenljivke $x = x(t) = a\sin t$.

Izračunamo $d\,x = a\,\cos t\,dt$ in izrazimo $t = \text{asin}\frac{x}{a}$. Tedaj je spodnj meja je $\text{asin}\frac{0}{a} = 0$ in zgornja meja je $\text{asin}\frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$. Dobimo integral

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\,\cos t\,dt \\
&= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt \\
&= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2|\cos t|\,\cos t\,dt \\
&= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos t\,dt \\
&= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\,\dfrac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^2\,\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Poglejmo si integracijo sode oziroma lihe funkcije na simetričnem intervalu $[-a, a]$.

1. Naj bo $f(x)$ soda funkcija, torej $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in [-a, a]$. Vpeljemo novo spremenljivko $x = -t$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \textstyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \textstyle\int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \textstyle\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \textstyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \textstyle 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

2. V primeru lihe funkcije ($f(-x) = -f(x)$) na podoben način dobimo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

Zapišimo relacijo inegracije po delih

$$\int udv = uv - \int vdu$$

v obliki

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,.$$

Uporaba Newton-Leibnizove formule da

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx &= \textstyle\left[u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right]\big|_a^b \\
&= \textstyle[u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx\,.
\end{aligned}$$

Primer 4.41. *Izračunajmo določeni integral* $\int_0^\pi x \sin x\,dx$.

Uporabimo integracijo po delih in sicer je $u = x$ in $dv = \sin x\,dx$. Tedaj je $du = dx$ in $v = -\cos x$:

$$\textstyle\int_0^\pi x\sin x\,dx = (-x\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi\,.$$

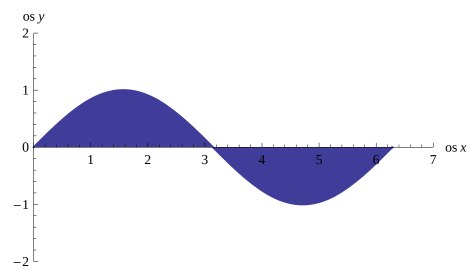
4.6 Uporaba določenega integrala v geometriji

Določeni integral ima številne uporabne vrednosti. Poglejmo si osnovno uporabo v geometriji.

Ploščina lika

Vemo že, da je za integrabilno funkcijo f, ki je nenegativna na intervalu $[a, b]$, ploščina krivočrtnega trapeza, ki ga določa f na $[a, b]$, enaka $\int_a^b f(x)\,dx$.

Primer 4.42. *Izračunajmo ploščino lika, ki je določen z grafom funkcije sinus na intervalu* $[0, 2\pi]$ *in z* x *osjo.*



Slika 4.5: Območje, ki je določeno s funkcijo sinus.

Območje sestavljata dva ploščinsko enako velika dela, kot je to razvidno s Slike 4.5, zato je ploščina S enaka:

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^\pi \sin x\,dx \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

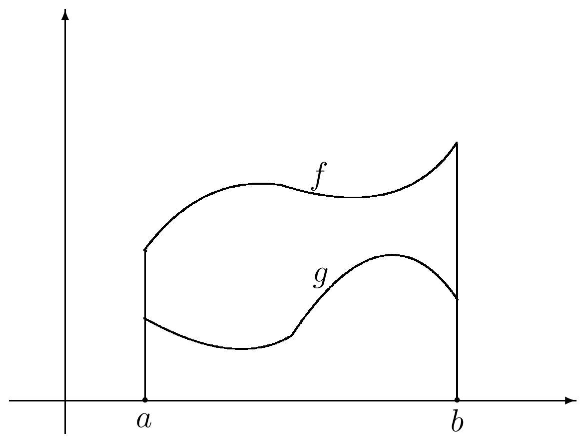
Trditev 4.43. *Naj bosta* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezni,* $f(x) \le g(x)$ *za vsak* $x \in [a, b]$. *Ploščina lika, ki ga omejujejo premice* $x = a$, $x = b$ *ter grafa funkcij* f *in* g, *je določena z*

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx\,.$$

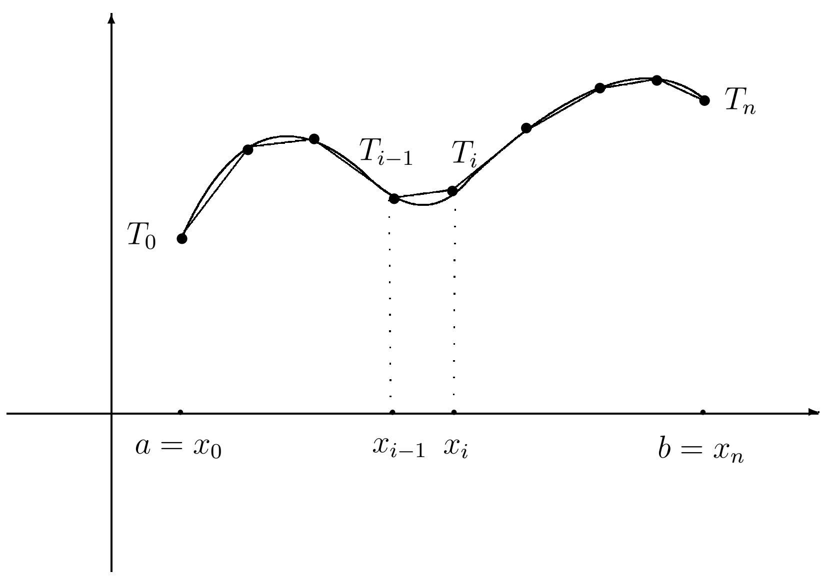
Dokaz. Ideja dokaza je razvidna iz primera, ko sta obe funkciji pozitivni, kar vidimo na Sliki 4.6. ∎

Dolžina loka

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija ter $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Definirajmo točke $T_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, ..., n$. Daljice $T_{i-1}T_i$, $i = 1, ..., n$, sestavljajo *poligonsko črto* $T_0T_1 \cdots T_n$, ki jo vidimo na Sliki 4.7.



Slika 4.6: Ploščina območja med dvema funkcijama.



Slika 4.7: Dolžina loka oz. poligonske črte.

Dolžina posamezne daljice je po Pitagorovem izreku enaka

$$
\begin{aligned}
\overline{T_{i-1}T_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\
&\underbrace{=}_{\text{Lagrang. i.}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(c_i)^2(x_i - x_{i-1})^2} \\
&= \sqrt{d_i^2(1 + f'(c_i)^2)} \\
&= d_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2}, \qquad c_i \in (x_{i-1}, x_i)
\end{aligned}
$$

Dolžina poligonske črte je vsota dolžin posameznih daljic

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{T_{i-1}T_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'(c_i)^2}\, d_i = R_{\sqrt{1+f'^2}}(D)\,.$$

Zato je naravno definirati *dolžino loka* ℓ funkcije f na intervalu $[a,b]$ kot

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx.$$

Primer 4.44. *Izračunajmo dolžino loka funkcije* $f(x) = x$ *na* $[0,1]$.
Ker je $f'(x) = 1$, je dolžina loka:

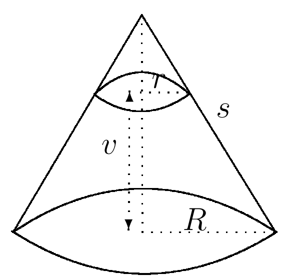
$$\ell \;=\; \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\,.$$

Prostornina rotacijskega telesa

Spomnimo se najprej prostornine prisekanega stožca (*glej Sliko 4.8*), ki je podana z

$$V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\,,$$

pri čemer sta r in R polmera osnovnih ploskev (krogov), v je višina in s stranski rob prisekanega stožca.



Slika 4.8: Prisekani stožec.

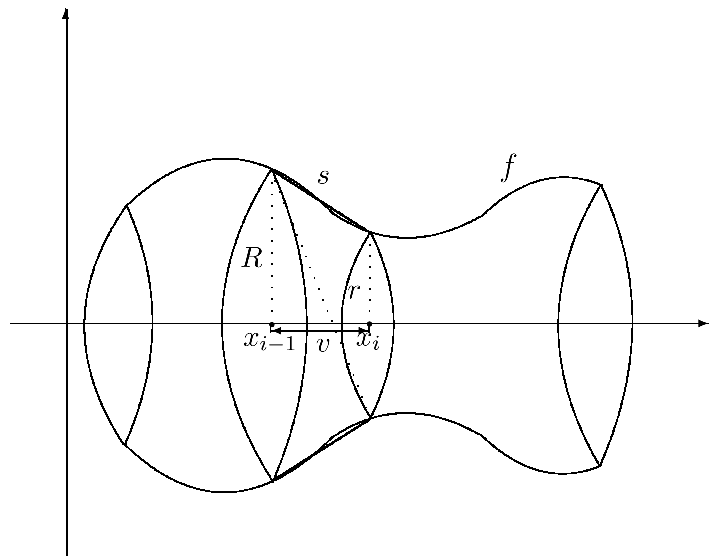
Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna nenegativna funkcija. Z vrtenjem grafa funkcije f okoli x osi dobimo *rotacijsko ploskev*, ki omejuje *rotacijsko telo*, ki ga vidimo na Sliki 4.9. Zanima nas prostornina rotacijskega telesa V.

Naj bo $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a,b]$. Krivuljo $f(x)$ na $[a,b]$ aproksimiramo s poligonsko črto $T_0T_1...T_n$, kjer je $T_i = f(x_i)$. Dolžina i-tega podintervala naj bo kot običajno d_i. To telo je prisekani stožec, za katerega je

$$r = f(x_{i-1}),\; R = f(x_i) \quad \text{ali} \quad R = f(x_{i-1}),\; r = f(x_i)$$

in

$$v = d_i\,,$$



Slika 4.9: Rotacijsko telo.

kot je to razvidno s Slike 4.9.

Prostornina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem poligonske črte je zato enaka

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi d_i}{3} (f(x_{i-1})^2 + f(x_i)^2 + f(x_{i-1}) f(x_i)) .$$

Ker je f zvezna funkcija in sta x_{i-1} in x_i blizu skupaj, je

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) \approx f(\xi_i) ,$$

kjer je $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Tako je

$$\begin{aligned} V &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi d_i}{3} 3 f(\xi_i)^2 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi f(\xi_i)^2 d_i \\ &= R_{\pi f^2}(D) . \end{aligned}$$

Naravno je vpeljati prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$, kot

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx .$$

Površina rotacijske ploskve

Poglejmo najprej še površino plašča prisekanega stožca, ki je enaka

$$P = \pi \, s \, (R + r) .$$

Naj bo sedaj D običajna delitev intervala $[a, b]$. Poiščimo površino rotacijskega telesa, ki jo dobimo z vrtenjem poligonske črte. Z vrtenjem posamezne daljice dobimo prisekani stožec (*glej Sliko 4.9*), za katerega je

$$r = f(x_{i-1}) \qquad \text{in} \qquad R = f(x_i)\,,$$

s pa je dolžina posamezne daljice

$$s = \overline{T_{i-1}T_i} = d_i\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}, \qquad c_i \in (x_{i-1}, x_i)\,.$$

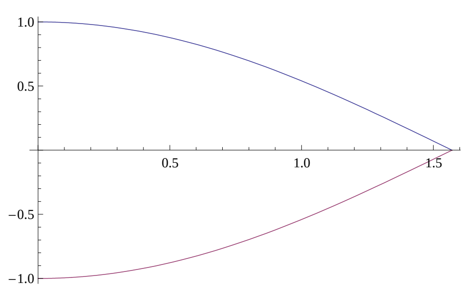
S podobnim sklepanjem kot pri prostornini pridemo do površine telesa, ki ga dobimo z vrtenjem poligonske črte

$$\begin{aligned} P &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}d_i \\ &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(\xi_i) + f(\xi_i))\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi 2 f(\xi_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}d_i \\ &= R_{2\pi f\sqrt{1+f'^2}}(D)\,. \end{aligned}$$

Zato je naravno vpeljati prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$ kot:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Primer 4.45. *Izračunajmo prostornino in površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem okoli x osi funkcije* $\cos x$ *na intervalu* $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Slika 4.10: Rotacijsko telo, določeno z grafom funkcije kosinus.

Na Sliki 4.10 vidimo rotacijsko telo. Izračunajmo njegovo prostornino V:

$$\begin{aligned} V &= \pi \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \\ &= \pi \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo še površino P:

$$P = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\, dx\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \sin x$ in dobimo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\, du\,. \end{aligned}$$

Podoben tip integrala smo obravnavali v Primeru 4.25. Uporabimo nastavek:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\, du &= (A\,u+B)\sqrt{1+u^2} + C\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \;/' \\ \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}} &= A\sqrt{1+u^2} + \frac{2(A\,u+B)u}{2\sqrt{1+u^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+u^2}} \;/\cdot\; \sqrt{1+u^2} \\ 1+u^2 &= 2A\,u^2 + B\,u + A + C \\ & \quad A = C = \frac{1}{2},\; B = 0\,. \end{aligned}$$

Površina je zato

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}|_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}\right) \\ &= \pi\,\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right)|_0^1 \\ &= \pi\,(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))\,. \end{aligned}$$

4.7 Naloge

Integracijske metode

1. Izračunaj nedoločene integrale:

   a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$,

b) $\int \frac{x^3 - 2x + 4}{x} dx,$

c) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx,$

d) $\int \frac{2^x}{3^{x-1}} dx.$

2. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj nedoločene integrale :

a) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx,$

b) $\int x \sqrt[3]{x-2} dx,$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx,$

d) $\int \frac{2 \ln x}{x} dx,$

e) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$

3. Z integracijo po delih zračunaj nedoločene integrale:

a) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$

b) $\int (2x - 3) e^{-x} dx,$

c) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx,$

d) $\int x^2 \cos x dx,$

e) $\int x^2 \text{acos}\, x dx,$

f) $\int \frac{\text{atan}_{e^x}}{e^x} dx.$

4. Izračunaj nedoločene integrale racionalnih funkcij:

a) $\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x} dx,$

b) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 3x^2 - 4} dx,$

c) $\int \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 4} dx,$

d) $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 4} dx.$

5. S pomočjo metode Ostrogradskega izračunaj nedoločene integrale:

a) $\int \frac{x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx,$

b) $\int \frac{x}{(x-1)^2 (x+1)^3} dx,$

c) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+x+1)}dx$,

d) $\int \frac{2x^2+3x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$.

6. Izračunaj nedoločene integrale funkcij sinus in kosinus:

a) $\int \cos^5 x dx$,

b) $\int \sin^2 x \, \cos^4 x dx$,

c) $\int \sin(3x) \, \sin x dx$,

d) $\int \cos x \, \cos(2x) \, \cos(3x) \, dx$,

e) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x}$,

f) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$,

g) $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x + 3}$.

7. Izračunaj nedoločene integrale iracionalnih funkcij:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$,

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$,

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$,

d) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{x^2+2}}dx$,

e) $\int \sqrt{2+x-x^2}dx$.

8. Izračunaj nedoločene integrale:

a) $\displaystyle\int (e^x-1)^3 e^x \, dx$,

b) $\displaystyle\int x\cos(2x) \, dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3\mathrm{asin}\, x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \, dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+8x^2+16} \, dx$,

f) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}}$,

g) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

Določeni inegral

1. Izračunaj določene integrale:

   a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$,

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(4x)dx$,

   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$,

   d) $\displaystyle\int_0^e \frac{\sin(\ln x))}{x}dx$.

2. Izračunaj dolžino loka funkcije $f(x)=\frac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}$ na $[1,e]$.

3. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije $f(x)=\ln(x+1)$ in abscisna os na intervalu $[1,3]$.

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x)=x^3$ in $g(x)=(x-2)^2$ ter abscisna os.

5. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x)=x^2-3x$ in $g(x)=x$.

6. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x)=\frac{6}{x}$ in $g(x)=7-x$.

7. Izračunaj ploščino elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{x(x+3)}{x+4}}$ na itervalu $[0,3]$.

9. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $f(x)=\sqrt{x-1}$ okoli osi x na itervalu $[2,5]$.

10. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem okoli osi x območja, omejenega z $f(x)=x^2$ in $g(x)=2-x^2$.

11. Izračunaj površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $f(x)=(3-x)\frac{\sqrt{x}}{3}$ okoli osi x na itervalu $[0,3]$.

Poglavje 5

Navadne diferencialne enačbe

V tem poglavju bomo združili znanje iz prejšnjih dveh poglavij. Obravnavali bomo različne vrste diferencialnih enačb in postopke za njihovo reševanje.

5.1 Osnovni pojmi

Problem diferencialnih enačb se bistveno razlikuje od problema reševanje algebrajskih enačb, zato je prav, da začnemo osnovne pojme in terminologijo spoznavati na motivacijskem primeru.

Poglejmo si matematično modeliranje prostega pada oziroma navpičnega meta.

Opazujmo telo, ki prosto pada ali je bilo vrženo navpično navzgor. Pri tem bomo zanemarili upor zraka. Naj bodo m masa telesa, t čas , $s = s(t)$ opravljena pot v času t, $v = v(t)$ hitrost telesa ob času t, $a = a(t)$ njegov pospešek, g težnostni pospešek ($g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$) in F sila teže. Tedaj velja

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} = s'(t)\,, \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)\,. \end{aligned}$$

Drugi Newtonov zakon pravi, da je sila težnosti enaka produktu mase telesa m in pospeška a

$$F = ma\,.$$

Pri prostem padu na telo z maso m deluje sila teže

$$F = -mg\,.$$

Predznak je negativen, ker sila (in težnostni pospešek) deluje(ta) navzdol. Zato velja

$$-m\,g = m\,a \Rightarrow -g = a\,,$$

kar nam da diferencialno enačbo

$$-g = s''(t)\,.$$

To je najenostavnejši tip diferencialne enačbe. Neznano funkcijo $s = s(t)$ poiščemo z dvakratnim zaporednim integriranjem:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \int (s'(t))'\,dt = \int s''(t)\,dt = \int -g\,dt = -g\,t + C_1\,, \\ s(t) &= \int s'(t)\,dt = \int (-g\,t + C_1)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,. \end{aligned}$$

Iskana funkcija oziroma položaj točke pri metu je določen z

$$s(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,.$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev $s_0 = s(0)$ in $v_0 = v(0) = s'(0)$ lahko izračunamo konstanti C_1 in C_2, s čimer dobimo

$$s(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0\,,$$

pri čemer je prvi člen prispevek pospešenega gibanja, drugi člen je prispevek enakomernega gibanja z začetno hitrostjo v_0 in tretji člen je začetna višina s_0.

Primer 5.1. *Kamen vržemo navpično navzgor s hitrostjo* $100\,m/s$.

1. *Kolikšno pot opravi po* 15 *sekundah?*

   Po 15 sekundah se kamen nahaja na višini

   $$\begin{aligned} s(t) &= -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0 \\ &= -10\frac{15^2}{2} + 100 \cdot 15 + 0 \\ &= 375\,m\,. \end{aligned}$$

2. *Kolikšna je bila maksimalna dosežena višina kamna?*

   Kamen se je nekaj časa dvigal, dokler ni dosegel maksimalne višine, zatem je začel padati. To pomeni, da moramo poiskati maksimum funkcije

   $$s(t) = -10\frac{t^2}{2} + 100\,t\,,$$

   ki ga izračunamo iz prvega odvoda funkcije:

   $$\begin{aligned} s'(t) = -10\,t + 100 &= 0 \\ t &= 10\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo še doseženo višino po 10 sekundah:

$$\begin{aligned} s(10) &= -10\tfrac{10^2}{2} + 100 \cdot 10 \\ &= 500\,m\,. \end{aligned}$$

Definicija 5.2. Diferencialna enačba *je enačba, ki vsebuje neodvisno spremenljivko (x), neznano funkcijo (y) ter njene odvode $(y', y'', ..., y^{(n)})$.*

Če je v diferencialni enačbi neznana funkcija odvisna od ene same spremenljivke, je diferencialna enačba *navadna*, sicer je diferencialna enačba *parcialna*. Nas bodo zanimale le *navadne diferencialne enačbe*.

Stopnja najvišjega odvoda v diferencialni enačbi se imenuje *red diferencialne enačbe*. Enačba

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

je navadna diferencialna enačba n-tega reda. *Rešitev diferencialne enačbe* je vsaka funkcija, ki zadošča diferencialni enačbi.

Primer 5.3. *1. Poiščimo rešitev diferencialne enačbe $y' = x$.*

Rešitev te diferencialne enačbe je oblike $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, kjer je C poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$.

2. Naj bo dana diferencialna enačba $y'' + y = 2e^x$. Pokaži da so funkcije

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x\,, \\ y_2 &= e^x + \cos x\,, \\ y_3 &= e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \end{aligned}$$

njene rešitve.

Za vsak primer posebej izračunamo drugi odvod in ga prištejemo funkciji. Funkcija y_3 je najbolj splošna rešitev diferencialne enačbe in vsebuje prvi dve rešitvi.

Konstante v rešitvi diferencialne enačbe imenujemo *parametri*. Pravimo, da rešitve sestavljajo *parametrično družino funkcij*, ki jo imenujemo *splošna rešitev* diferencialne enačbe. Za konkretno vrednost konstant dobimo *posebno* ali *partikularno rešitev*. Partikularna rešitev je lahko določena z zahtevo, naj ima rešitev y v izbranih točkah x_i vrednost y_i. Zahtevam $y(x_i) = y_i$ pravimo *začetni pogoji* diferencialne enačbe.

Vprašajmo se sedaj obratno, ali je lahko dana parametrična družina funkcij rešitev neke diferencialne enačbe.

Primer 5.4. *Naj bo dana dvoparametrična družina funkcij* $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$. *Preverimo, ali je* y *rešitev kakšne diferencialne enačbe.*

Izračunajmo prva dva odvoda funkcije y:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x}\,, \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} + 9Be^{-3x}\,. \end{aligned}$$

Sistem rešimo glede na neznanki A in B. Rešitev vstavimo v $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ in dobimo

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0\,.$$

Ob predpostavki, da je družina funkcija y vsaj dvakrat odvedljiva, smo našli diferencialno enačbo, katere rešitev je funkcija y.

Poglejmo si geometrijsko interpretacijo rešitev diferencialne enačbe. Začnimo s konkretnim primerom.

Naj bo dana diferencialna enačba prvega reda

$$y' = y\,.$$

Rešitev dobimo z nedoločenim integriranjem

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int y(x)\,dx \Rightarrow y(x) = C\,e^x\,, C \in \mathbb{R}\,.$$

Izberimo nekaj konkretnih vrednosti za konstanto $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ in 3 in poglejmo pripadajoče rešitve diferencialne enačbe:

$$-3\,e^x\,,\ -2\,e^x\,,\ -e^x\,,\ 0\,,\ e^x\,,\ 2\,e^x\,,\quad \text{in}\quad 3\,e^x\,.$$

Njihovi grafi so na Sliki 5.1.

S predpisom

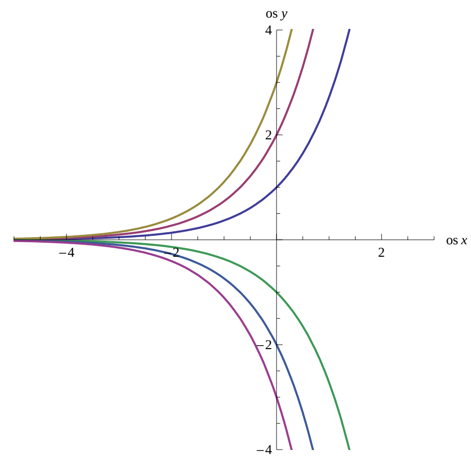
$$y(x) = C\,e^x$$

je podana enoparametrična družina rešitev diferencialne enčbe $y' = y$.

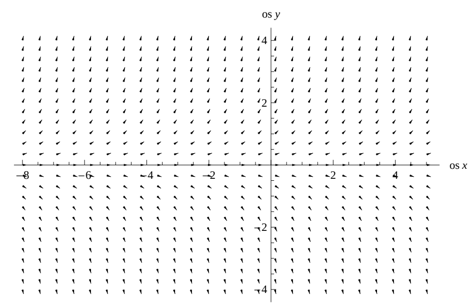
Poglejmo na ta primer malo drugače in sicer je z

$$y' = y$$

določen odvod v poljubni točki, torej je smerni koeficient tangente k v tem primeru enak y. Krivulje, določene s $k = y$ imenujemo *izokline*.
Izberimo si ponovno nekaj konkretnih vrednosti, tokrat za smerni koeficient $k = -3, -2, ..., 2$ in 3. Na vsako izoklino $k = y$ narišemo odseke tangent, katerih smerni koeficient je k. Daljice nam predstavljajo potek rešitev diferencialne enačbe, kar vidimo na Sliki 5.2.



Slika 5.1: Rešitve diferencialne enačbe $y' = y$.



Slika 5.2: Izokline diferencialne enačbe $y' = y$.

Poglejmo še vse skupaj za poljubno diferencialno enačbo prvega reda. Diferencialno enačbo

$$F(x, y, y') = 0$$

zapišemo v eksplicitni obliki

$$y' = f(x, y)\,.$$

S tem dobimo formulo za računanje odvoda v točki $(x_0, y(x_0) = y_0)$. Ta odvod določa smer tangente na tisto rešitev diferencialne enačbe v točki (x_0, y_0), za katero je $y' = f(x_0, y_0)$. Pravimo, da je s predpisom

$$y' = f(x, y)$$

določeno *smerno polje*. Definirajmo še izokline v splošnem.

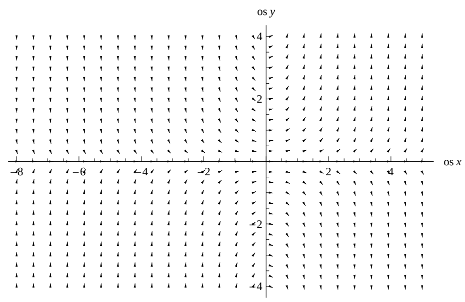
Definicija 5.5. Izokline *diferencialne enačbe* $y' = f(x, y)$ *so krivulje, podane z enačbami* $f(x, y) = k$, *kjer* $k \in \mathbb{R}$.

Vsaka rešitev diferencialne enačbe, ki seka izoklino $f(x, y) = k$, ima v presečišču tangento s smernim koeficientom k.

Primer 5.6. *Narišimo smerno polje diferencialne neačbe*

$$y' - x\,y = 0\,.$$

Najprej izrazimo $y' = -xy$. Smerno polje vidimo na Sliki 5.3.



Slika 5.3: Izokline oziroma smerno polje diferencialne enačbe $y' = y$.

Izpeljemo lahko preprosto numerično metodo za iskanje približka rešitve diferencialne enačbe.

Naj bo (x_0, y_0) začetna točka, ki pripada neki rešitvi diferencialne enačbe. Tedaj je

$$k_0 = f(x_0, y_0)\,.$$

Nadalje naj bo

$$x_1 = x_0 + h\,,$$

ter poiščimo pripadajoči y_1 in sicer velja

$$y_1 = y_0 + y'(x_0)\,h = y_0 + k_0\,h = y_0 + f(x_0, y_0)\,h\,.$$

Postopek ponavljamo in skozi dobljene točke interpoliramo funkcijo. To metodo imenujemo *Eulerjeva numerična metoda*:

$$\begin{array}{rcl} (x_0, y_0) & \ldots & \text{začetna točka} \\ x_{r+1} & = & x_r + h \\ y_{r+1} & = & y_r + f(x_r, y_r)\,h\,,\ r = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

Primer 5.7. *Z Eulerjevo numerično metodo poiščimo rešitev diferencialne enačbe* $y' = x\,y$, *če je* $y(0) = 1$ *in je korak* $h = 0.2$.

Začetna točka je $x_0 = 0$ in $y_0 = 1$. Ker je $f(x, y) = xy$, računamo naslednje točke za $r = 0, ..., 4$ po formulah

$$\begin{array}{rcl} x_{r+1} & = & x_r + 0.2 \\ y_{r+1} & = & y_r + 0.2\,x_r\,y_r\,. \end{array}$$

Dobimo tabelo točk

$$
\begin{aligned}
&(0,1)\,,\\
&(0.2,1)\,,\\
&(0.4,1.04)\,,\\
&(0.6,1.1232)\,,\\
&(0.8,1.2580)\,,\\
&(1,1.4593)\,.
\end{aligned}
$$

5.2 Diferencialne enačbe prvega reda

V tem razdelku bomo obravnavali diferencialne enačbe, ki vsebujejo samo prvi odvod neznane funkcije.

Splošna oblika diferencialne enačbe prvega reda je

$$F(x,y,y')=0\,.$$

Poglejmo različne tipe diferencialnih enačb prvega reda.

DIFERENCIALNE ENAČBE Z LOČLJIVIMA SPREMENLJIVKAMA:

$$y'=f(x)g(y)\,.$$

Pri tem sta $f(x)$ in $g(y)$ poljubni zvezni funkciji. Upoštevamo $y'=\dfrac{dy}{dx}$ in integriramo:

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x)g(y)\\
\tfrac{dy}{g(y)} &= f(x)dx\\
\int\frac{dy}{g(y)} &= \textstyle\int f(x)dx\,.
\end{aligned}
$$

Primer 5.8. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe* $y'=y\cos x$.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dy}{y} &= \int\cos x\,dx\\
\ln y &= \sin x + D\\
y &= e^{\sin x+\ln D}\\
y &= Ce^{\sin x}\,.
\end{aligned}
$$

Primer 5.9. *Masa snovi m se pri radioaktivnem razpadu spreminja v skladu z diferencialno enačbo*

$$dm = -\beta m\, dt\,,$$

kjer je t čas razpada, β pa koeficient, odvisen od snovi.

1. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe.*

$$\begin{aligned} dm &= -\beta m\, dt \\ \int \tfrac{dm}{m} &= -\beta \int dt \\ \ln m &= -\beta t + D \\ m &= e^{-\beta t + \ln C} \\ m &= Ce^{-\beta t}\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je torej $m(t) = Ce^{-\beta t}$.

2. *Poiščimo partikularno rešitev pri začetnem pogoju $m(0) = m_0$.*

$$\begin{aligned} m_0 &= m(0) = Ce^{-\beta\, 0} = C \quad in \\ m(t) &= m_0 e^{-\beta t}\,. \end{aligned}$$

3. *Poiščimo razpolovni čas T glede na začetni pogoj iz točke b).*

Ker je T razpolovni čas, velja $m(T) = \frac{1}{2} m_0$.

$$\begin{aligned} m(T) = m_0 e^{-\beta T} &= \frac{1}{2}\, m_0 \\ e^{-\beta T} &= \frac{1}{2} \\ -\beta T &= \ln \tfrac{1}{2} \\ T &= \frac{-\ln \frac{1}{2}}{\beta} = \frac{\ln 2}{\beta}\,. \end{aligned}$$

Homogena diferencialna enačba:

$$y' = f(\frac{y}{x})\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \dfrac{y}{x}$ oziroma $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Tedaj je $y(x) = u(x)x$ in $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ oziroma krajše $y' = u'x + u$.

$$
\begin{aligned}
\text{Iz} \qquad y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{sledi} \\
u'x + u &= f(u) \\
\frac{du}{dx}x &= f(u) - u \\
\frac{du}{f(u) - u} &= \frac{dx}{x}\,.
\end{aligned}
$$

Dobili smo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama, ki jo načeloma znamo rešiti.

Primer 5.10. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe* $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Preoblikujmo diferencialno enačbo:

$$
y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}\,.
$$

Vpeljimo $u = \dfrac{y}{x}$ in upoštevamo $y' = u'x + u$, s čimer dobimo novo diferencialno enačbo, ki je tipa z ločljivima spremenljivkama:

$$
\begin{aligned}
u'x + u &= \frac{1+u}{1-u} \\
\frac{du}{dx}x &= \frac{1+u}{1-u} - u \\
\frac{du}{dx}x &= \frac{1+u^2}{1-u} \\
\int \frac{1-u}{1+u^2} &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{1}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2} &= \int \frac{dx}{x} \\
\mathrm{atan}u - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) &= \ln x + C \\
\mathrm{atan}\frac{y}{x} &= \ln\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \ln x + C \\
\mathrm{atan}\frac{y}{x} &= \ln(\sqrt{\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2}} + C \\
\mathrm{atan}\frac{y}{x} &= \ln\sqrt{x^2+y^2} + C\,.
\end{aligned}
$$

Linearna diferencialna enačba prvega reda:

$$y' + f(x)y = g(x)\,.$$

Tu sta f in g poljubni zvezni funkciji. Obravnavajmo najprej primer, ko je $g(x) \equiv 0$. Dobimo diferencialno enačbo

$$y' + f(x)y = 0\,,$$

ki jo imenujemo *homogena linearna diferencialna enačba.* To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama, ki jo znamo rešiti:

$$\begin{aligned}
y' &= -f(x)y \\
\tfrac{dy}{y} &= -f(x)dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\textstyle\int f(x)\,dx \\
\ln y &= -F(x) + D \\
y &= e^{-F(x)+\ln C} \\
y &= Ce^{-F(x)}\,.
\end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela bomo označili z y_H:

$$y_H = Ce^{-F(x)}\,,$$

kjer je $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Zanima nas, kako bi poiskali splošno rešitev originalne linearne diferencialne enačbe. V ta namen si poglejmo naslednji izrek, ki velja tudi za diferencialne enačbe višjega reda.

Izrek 5.11. *Če je y_P kakšna partikularna rešitev linearne diferencialne enačbe in je y_H rešitev pripadajoče homogene linearne diferencialne enačbe. Potem je funkcija*

$$y = y_P + y_H$$

tudi rešitev linearne diferencialne enačbe.

Dokaz.

Vstavimo funkcijo $y = y_P + y_H$ v levo stran linearne diferencialne enačbe $y' + f(x)y = g(x)$:

$$\begin{aligned}
y' + f(x)y &= (y_P' + y_H') + f(x)(y_P + y_H) \\
&= (y_P' + f(x)y_P) + (y_H' + f(x)y_H) \\
&= g(x) + 0 = g(x)\,.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Obliko partikularne rešitve lahko večkrat uganemo na osnovi oblike funkcije g in v ta namen uporabimo različne nastavke. Poglejmo si primer.

Primer 5.12. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$y' + 2y = 4x^2 .$$

Rešimo najprej homogeni del:

$$y' + 2y = 0 .$$

$$\begin{aligned} y' &= -2y \\ \tfrac{dy}{y} &= -2dx \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int dx \\ \ln y &= -2x + \ln C \\ y_H &= Ce^{-2x} . \end{aligned}$$

Partikularno rešitev poskusimo poiskati z nastavkom $y_P = ax^2 + bx + c$. Tedaj je $y'_P = 2ax + b$. Vstavimo v diferencialno enačbo:

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2$$

$$\begin{aligned} &2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ &a + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ &b + 2c = 0 \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

$$y_P = 2x^2 - 2x + 1 .$$

Splošna rešitev je

$$y = y_P + y_H = 2x^2 - 2x + 1 + Ce^{-2x} .$$

Namesto ugibanja lahko za iskanje neke partikularne rešitve y_P linearne diferencialne enačbe uporabimo metodo *variacije konstant*.

Uporabimo nastavek

$$y_P = C(x)y_{H,1} ,$$

kjer je $y_{H,1}$ partikularna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe za $C = 1$, torej $y_{H,1} = e^{-F(x)}$. Torej je nastavek

$$y_P = C(x)e^{-F(x)} ,$$

kjer je $F(x) = \int f(x)\,dx$. V bistvu v splošni rešitvi homogene linearne diferencialne enačbe zamenjamo konstanto C z neznano funkcijo $C(x)$. Funkcijo $C(x)$ bomo določili tako, da bo y_P partikularna rešitev linearne diferencialne enačbe. Nastavek vstavimo v originalno linearno diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned}
C'(x)y_{H,1} + C(x)y'_{H,1} + f(x)C(x)y_{H,1} &= g(x) \\
C'(x)y_{H,1} + C(x)\underbrace{\left[y'_{H,1} + f(x)y_{H,1}\right]}_{0} &= g(x) \\
C'(x) &= \frac{g(x)}{y_{H,1}} \\
C'(x) &= g(x)e^{F(x)}
\end{aligned}$$

in zato

$$C(x) = \int g(x)e^{F(x)}\,dx\,.$$

Torej je

$$y_P = y_{H,1}\int g(x)e^{F(x)}\,dx = e^{-F(x)}\int g(x)e^{F(x)}\,dx$$

iskana partikularna rešitev, splošna rešitev linearne diferencialne enačbe pa je

$$y = y_H + y_P = e^{-F(x)}\int g(x)e^{F(x)}\,dx + Ce^{-F(x)}\,.$$

Primer 5.13. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$xy' + y = 1 + \ln x\,.$$

Najprej poiščimo rešitev homogenega dela y_H

$$\begin{aligned}
xy' &= -y \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\
\ln y &= -\ln x + C \\
y &= x^{-1}\underbrace{e^C}_{D} \\
y_H &= \frac{D}{x}\,.
\end{aligned}$$

Z metodo variacije konstant poiščimo še partikularno rešitev y_P

$$\begin{aligned}
y_P &= \frac{D(x)}{x} \\
y'_P &= \frac{D'(x)x - D(x)}{x^2}\,.
\end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$
\begin{aligned}
x\frac{D'(x)x - D(x)}{x^2} + \frac{D(x)}{x} &= 1 + \ln x \\
D'(x) &= 1 + \ln x \\
D(x) &= \int (1 + \ln x)\, dx
\end{aligned}
$$

$$D(x) = x \ln x$$

$$y_P = \ln x\,.$$

Skupna rešitev je

$$y = y_H + y_P = \frac{D}{x} + \ln x\,.$$

Bernoullijeva diferencialna enačba:

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}\,.$$

Tu sta $f(x)$ in $g(x)$ zvezni funkciji, pri čemer je $g(x) \neq 0$. Za $\alpha = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $\alpha = 1$ pa homogeno linearno diferencialno enačbo, zato privzamimo, da je α različen od 0 in 1.

Delimo diferencialne enačbe z y^{α}:

$$y' y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$$

in vpeljimo novo spremenljivko $z = y^{1-\alpha}$, kjer je $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x)$$

oziroma

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x)\,.$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo za neznano funkcijo z. Po prejšnji metodi jo rešimo in nato upoštevamo povezavo med y in z.

Primer 5.14. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe*

$$xy^2y' + y^3 = x\cos x\,.$$

Delimo enačbo z xy^2

$$
\begin{aligned}
y' + \frac{y}{x} &= \frac{\cos x}{y^2} \\
y' + \frac{y}{x} &= \cos x\, y^{-2}\,,
\end{aligned}
$$

kar pomeni, da je to Bernoullijeva diferencialna enačba za $\alpha = -2$. Delimo je z y^{-2}, kar je ekvivalentno množenju z y^2

$$y'y^{-2} + \frac{y^3}{x} = \cos x\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $z = y^1 - (-2) = y^3$, kater odvod je $z' = 3y^2y'$ in vstavimo

$$\begin{aligned} \frac{z'}{3} + \frac{z}{x} &= \cos x \\ z' + \frac{3z}{x} &= 3\cos x\,. \end{aligned}$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo in najprej poiščimo rešitev homogenega dela z_H

$$\begin{aligned} z' + \frac{3z}{x} &= 0 \\ \frac{dz}{z} &= -3\frac{dx}{x} \\ \ln z &= -3\ln x + C \\ z &= x^{-3}\underbrace{e^C}_{D} \\ z_H &= D\,x^{-3}\,. \end{aligned}$$

Z metodo variacije konstant poiščimo partikularno rešitev z_P

$$\begin{aligned} z_P &= D(x)\,x^{-3} \\ z_P' &= D'(x)\,x^{-3} - 3D(x)x^{-4}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} D'(x)\,x^{-3} - 3D(x)x^{-4} + \frac{3D(x)\,x^{-3}}{x} &= 3\cos x \\ D'(x) &= 3\cos x\,x^3 \\ D(x) &= \int 3\cos x\,x^3\,dx \\ D(x) &= 3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)\,. \end{aligned}$$

Nedoločeni inegral izračunamo s trikratno uporabo integracije po delih, a smo podrobnosti izpustili. Partikularna rešitev je

$$z_P = \frac{3\left(3\left(x^2-2\right)\cos x + x\left(x^2-6\right)\sin x\right)}{x^3}\,.$$

Skupna rešitev je

$$
\begin{aligned}
z &= z_H + z_P \\
&= \frac{D}{x^3} + \frac{3\,(3\,(x^2-2)\cos x + x\,(x^2-6)\sin x)}{x^3} \\
&= \frac{D + 3\,(3\,(x^2-2)\cos x + x\,(x^2-6)\sin x)}{x^3}\,.
\end{aligned}
$$

Upoštevamo še zvezo med y in z

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{\frac{D + 3\,(3\,(x^2-2)\cos x + x\,(x^2-6)\sin x)}{x^3}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{D + 3\,(3\,(x^2-2)\cos x + x\,(x^2-6)\sin x)}}{x}\,.
\end{aligned}
$$

5.3 Linearne diferencialne enačbe drugega reda

Sedaj nas zanimajo diferencialne enačbe, ki poleg prvega vsebujejo tudi drugi odvod neznane funkcije.

Splošna oblika diferencialne enačbe drugega reda je

$$F(x, y, y', y'') = 0\,.$$

Nas bodo zanimale le linearne diferencialne enačbe drugega reda

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{5.1}$$

Tu so $a_1(x)$, $a_2(x)$ in $f(x)$ zvezne funkcije. Če postavimo, da je $f(x) = 0$, iz (5.1) dobimo pripadajočo homogeno enačbo:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{5.2}$$

Izrek 5.15. *Če sta funkciji y_1 in y_2 rešitvi diferencialne enačbe* (5.2) *ter C_1 in C_2 poljubni konstanti, tedaj je tudi funkcija*

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

rešitev diferencialne enačbe (5.2).

Dokaz. Ker sta y_1 in y_2 rešitvi diferencialne enačbe (5.2), je:

$$y_1' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \quad \text{in}$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0\,.$$

Izračunamo prvi in drugi odvoda y_H:

$$C_1y_1' + C_2y_2'\,,$$

$$C_1y_1'' + C_2y_2''\,.$$

Vstavimo v (5.2):

$$\begin{aligned}
&(C_1y_1'' + C_2y_2') + a_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + a_0(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\
&= \underbrace{C_1(y_1' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1)}_{0} + \underbrace{C_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2)}_{0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Zato je $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ rešitev diferencialne enačbe (5.2). ∎

Zanima nas, ali je to tudi splošna rešitev diferencialne enačbe (5.2). Naj za y_1 in y_2 velja $y_2 = ky_1$, $k \in \mathbb{R}$. Tedaj

$$C_1y_1 + C_2y_2 = C_1y_1 + C_2ky_1 = Cy_1\,.$$

Namesto dvoparametrične družine rešitev dobimo enoparametrično, zato $C_1y_1+C_2y_2$ v tem primeru ni splošna rešitev diferencialne enačbe (5.2).

Kaj mora veljati za C_1 in C_2, do bo $C_1y_1+C_2y_2$ splošna rešitev diferencialne enačbe (5.2).

Definicija 5.16. *Če je $y_2 = ky_1$, $k \in \mathbb{R}$, pravimo da sta y_1 in y_2* linearno odvisni *rešitvi diferencialne enačbe. V nasprotnem sta* linarno neodvisni.

Dvoparametrično družino rešitev dobimo takrat, ko sta y_1 in y_2 linearno neodvisni funkciji. Zato velja naslednji izrek.

Izrek 5.17. *Če sta funkciji y_1 in y_2 linearno neodvisno rešitvi diferencialne enačbe* (5.2) *ter C_1 in C_2 poljubni konstanti, tedaj je*

$$C_1y_1 + C_2y_2$$

splošna rešitev diferencialne enačbe (5.2).

Izrek 5.18. *Če je y_P partikularna rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda, y_1 in y_2 pa linearno neodvisni rešitvi njenega homogenega dela. Tedaj je*

$$y = y_P + C_1y_1 + C_2y_2$$

splošna rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda.

Dokaz. Velja

$$y_P'' + a_1(x)y_P' + a_0(x)y_P = f(x)\,,$$

$$y_1' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0\,,$$

$$y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0\,.$$

Naj bosta C_1 in C_2 poljubni realni števili in

$$y = y_P + C_1y_1 + C_2y_2\,.$$

Tedaj je

$$y' = y_P' + C_1y_1' + C_2y_2'\,,$$

$$y'' = y_P'' + C_1y_1'' + C_2y_2''$$

in zato

$$\begin{aligned}
y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y' &= (y_P'' + C_1y_1'' + C_2y_2'') \\
&\quad + a(x)(y_P'' + C_1y_1'' + C_2y_2'') + a_0(x)(y_P + C_1y_1 + C_2y_2) \\
&= (y_P'' + a_1(x)y_P' + a_0(x)y_P) + C_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) \\
&\quad + C_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) \\
&= f(x)\,.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je y rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda. Ker sta v njej konstanti C_1 in C_2 poljubni, funkciji y_1 in y_2 pa linearno neodvisni, je družina funkcij $y_P + C_1y_1 + C_2y_2$ res splošna rešitev. ∎

Poglejmo najprej, kako poiščemo partikularno rešitev y_P (nehomogene) linearne diferencialne enačbe. Uporabimo isto metodo kot pri linearni diferencialni enačbi prvega reda in sicer metodo variacije konstant. V splošni rešitvi homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ zamenjamo konstanti s funkcijama $C_1(x)$ in $C_2(x)$, s čimer dobimo nastavek

$$y_P = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\,.$$

Neznani funkciji določimo tako, da zadoščata pogoju

$$C_1'(x)y_1 + C_2(x)'y_2 = 0\,.$$

Izračunajmo prvi in drugi odvod y_P:

$$\begin{aligned}
y_P' &= C_1(x)'y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\,, \\
y_P'' &= C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''\,.
\end{aligned}$$

Če hočemo, da bo y_P partikularna rešitev linearne diferencialne enačbe, mora zadoščati

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_P'' + a_1(x)y_P' + a_0(x)y_P' \\
&= C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + a_1(x)(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') \\
&\quad +a_0(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) \\
&= C_1(x)(\underbrace{y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1}_{0}) + C_2(x)(\underbrace{y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2}_{0}) \\
&\quad +C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \\
&= C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'\,.
\end{aligned}$$

Variacija konstant da sistem enačb

$$C_1'(x)y_1 + C_2(x)'y_2 = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)\,.$$

Izkaže se, da je ta sistem enolično rešljiv, ker sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi.

Bolj problematično je iskanje rešitev y_1 in y_2 homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda. Žal ni splošne metode, ki bi rešila ta problem. V ta namen se bomo sedaj omejili na enačbe (5.1), kjer sta funkciji $a_1(x)$ in $a_2(x)$ konstantni. Imenujemo jih linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti. Podobno so definirane tudi linearne diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti.

5.4 Linarne diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti

Poglejmo si najprej linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\,,$$

pri čemer sta sedaj koeficienta a_1 in a_0 realni števili, torej konstanti. Rešitve njenega homogenega dela

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

iščemo med funkcijami $e^{\lambda x}$, kjer je λ neznani koeficient:

$$y = e^{\lambda x}$$

$$y' = \lambda\, e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{kx} + a_1 \lambda e^{kx} + a_0 e^{kx} = 0$$

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{kx} = 0$$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0\,.$$

Polinom $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ imenujemo *karakteristični polinom.* Če sta λ_1 in λ_2 ničli karakterističnega polinoma, tedaj sta $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ rešitvi homogenega dela diferencialne enačbe.

Glede na vrsto ničel karakterističnega polinoma ločimo tri možnosti.

(i) Ničli λ_1 in λ_2 sta realni in različni.

Rešitvi homogenega dela diferencialne enačbe sta potemtakem $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Če hočemo, da bo

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

splošna rešitev homogenega dela diferencialne enačbe, morata biti y_1 in y_2 linearno neodvisni funkciji. Njun kvocient

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

je eksponentna funkcija, zato sta to linearno neodvisni rešitvi in splošna rešitev homogenega dela je

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Ničli sta konjugirani kompleksni par.

Naj bo $\lambda_1 = a + ib$ in $\lambda_2 = a - ib$. Tedaj sta

$$y_1 = e^{(a+ib)x} \quad \text{in} \quad y_2 = e^{(a-ib)x}$$

partikularni rešitvi. Njun kvocient je

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(a+ib)x}}{e^{(a-ib)x}} = e^{i2bx}$$

in ni konstanten, zato sta rešitvi linearno neodvisni. Splošna rešitev je torej

$$y_H = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}$$

oziroma

$$y_H = e^{ax}(C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx})\,.$$

Izkaže se, da lahko najdemo konstanti D_1 in D_2 taki, da je

$$C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx} = D_1\, \cos(bx) + D_2\, \sin(bx)\,.$$

Tako lahko splošno rešitev zapišemo kot

$$y_H = e^{ax}(D_1 \cos(bx) + D_2 \sin(bx))\,.$$

Sedaj sta $e^{a\,x}\cos(b\,x)$ in $e^{a\,x}\sin(b\,x)$ partikularni rešitvi. Ker njun kvocient $\cot(b\,x)$ ni konstanten, sta linearno neodvisni.

(iii) Ničla je realna in dvojna.

Naj bo λ_0 dvojna ničla karakterističnega polinoma. Tedaj je ena partikularna rešitev $y_1 = e^{\lambda_0\,x}$. Pokažimo, da je $y_2 = xe^{\lambda_0 v x}$ druga partikularna rešitev. Najprej izračunajmo oba odvoda:

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{\lambda_0\,x} + \lambda_0\,x e^{\lambda_0\,x} = e^{\lambda_0\,x}(\lambda_0\,x + 1) \\ y_2'' &= \lambda_0 e^{\lambda_0\,x}(\lambda_0\,x + 1) + \lambda_0 e^{\lambda_0\,x} = \lambda_0 e^{\lambda_0\,x}(\lambda_0\,x + 2)\,. \end{aligned}$$

Le-ta vstavimo v homogeni del diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 e^{\lambda_0\,x}(\lambda_0\,x + 2) + a_1 e^{\lambda_0\,x}(\lambda_0\,x + 1) + a_0 x e^{\lambda_0\,x} \\ &= e^{\lambda_0\,x}[\underbrace{(\lambda_0^2 + 2a_1\lambda_0 + a_0)}_{0}\,x + \underbrace{(2\lambda_0 + a_1)}_{0}] \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Prvim oklepaj je enak 0, ker je λ_0 ničla karakterističnega polinoma. Ker je λ_0 dvojna ničla, je v tej točki odvod karakterističnega polinoma enak 0:

$$0 = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)'(\lambda_0) = (2\lambda + a_1)(\lambda_0) = 2\lambda_0 + a_1\,.$$

Torej lahko splošno rešitev zapišemo kot

$$y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}\,.$$

Ker je kvocient partikularnih rešitev enak x, sta le-ti linearno neodvisni.

Primer 5.19. *Dana je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti*

$$y'' - 4y = 8x\,.$$

1. *Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe.*

Nastavimo karakteristični polinom

$$\lambda^2 - 4 = 0\,.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2\,.$$

Splošna rešitev homogenega dela je

$$y_H = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x}\,.$$

Partikularno rešitev poiščemo z metodo variacije konstant

$$y_P = C_1(x)\, e^{2x} + C_2(x)\, e^{-2x}\,.$$

$$\begin{aligned} C_1'(x)\, e^{2x} + C_2'(x)\, e^{-2x} &= 0 \\ 2C_1'(x)\, e^{2x} - 2C_2'(x)\, e^{-2x} &= 8x\,. \end{aligned}$$

Rešimo sistem enačb tako, da prvo enačbo pomnožimo z 2, ju seštejemo in izračunamo $C_1(x)$

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= 2x\, e^{-2x} \\ C_1(x) &= \int 2x\, e^{-2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}(-1-2x)\, e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Uporabimo prvo enačbo v sistemu enačb variacije konstant in izračunamo še najprej $C_2'(x)$, zatem pa tudi $C_2(x)$

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= -C_1'(x)\, e^{4x} \\ &= -2xe^{2x} \\ C_2(x) &= \int (-2xe^{2x})\, dx \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)e^{2x}\,. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{2}(-1-2x)\, e^{-2x}e^{2x} + \frac{1}{2}(1-2x)e^{2x}e^{2x} \\ &= -2x\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$\begin{aligned} y &= y_H + y_P \\ &= C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x} - 2x\,. \end{aligned}$$

2. *Poiščimo tisto rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 4$.*

   Izračunati moramo odvod rešitve diferencialne enačbe

$$y' = 2C_1\,e^{2x} - 2C_2\,e^{-2x} - 2\,.$$

   Upoštevamo pogoja in izračunamo iskani konstanti

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) &= 2C_1 - 2C_2 - 2 = 4 \\ C_1 &= 3 \\ C_2 &= -3\,. \end{aligned}$$

   Iskana rešitev je

$$y = 3\,(e^{2x} - e^{-2x}) - 2x\,.$$

Poglejmo si še diferencialne enačbe višjega reda. Linearna diferencialna enačba n-tega reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = f(x)\,,$$

Če postavimo $f(x) = 0$, dobimo homogeni del linearne diferencialne enačbe višjega reda. Karakteristični polinom je

$$a_n\,\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda' + a_0\,\lambda = 0\,.$$

Rešitve homogenega dela dobimo iz ničel karakterističnega polinoma in sicer na enak način kot pri diferencialni enačbi drugega reda. Poglejmo si to na primeru.

Primer 5.20. *Poiščimo splošno rešitev homogene linearne diferencialne enačbe 4. reda s konstantnimi koeficienti*

$$y^{(4)} - y = 0\,.$$

$$\begin{aligned} &\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) \\ &y_1 = e^x \\ &y_2 = e^{-x} \\ &y_3 = e^{0x}\cos(1\,x) = \cos x \\ &y_4 = e^{0x}\sin(1\,x) = \sin x \\ &y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_4 + C_4 y_4 \\ &y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x\,. \end{aligned}$$

Poglejmo si še variacijo konstant za linearne diferencialne višjega reda. Naj bo

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda s konstantnimi koeficienti. Partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe iščemo z nastavkom

$$y_P = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n \,.$$

Variacijo konstant sestavlja naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned}
C_1'(x) y_1 + C_2(x)' y_2 + \cdots + C_n(x)' y_n &= 0 \\
C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \cdots + C_n'(x) y_n' &= 0 \\
C_1'(x) y_1'' + C_2'(x) y_2'' + \cdots + C_n'(x) y_n'' &= 0 \\
&\vdots \\
C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} &= 0 \\
C_1'(x) y_1^{(n)} + C_2'(x) y_2^{(n)} + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n)} &= f(x) \,.
\end{aligned}$$

V njem so neznanke odvodi $C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)$, funkcije $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ pa dobimo z nedoločenim integriranjem odvodov.

Primer 5.21. *Poiščimo splošno rešitev homogene linearne diferencialne enačbe 4. reda s konstantnimi koeficienti*

$$y^{(4)} - y = \sin x \,.$$

Vemo, da je $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, zato iščemo partikularno rešitev v obliki

$$y_H = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x} + C_3(x) \cos x + C_4(x) \sin x \,.$$

Uporabimo variacijo konstant:

$$\begin{aligned}
C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} + C_3'(x) \cos x + C_4'(x) \sin x &= 0 \\
C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} - C_3'(x) \sin x + C_4'(x) \cos x &= 0 \\
C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} - C_3'(x) \cos x - C_4'(x) \sin x &= 0 \\
C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} + C_3'(x) \sin x - C_4'(x) \cos x &= \sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2C_2'(x) e^{-x} + C_3'(x)(\cos x + \sin x) + C_4'(x)(\sin x - \cos x) &= 0 \\
2C_3'(x) \cos x + 2C_4'(x) \sin x &= 0 \\
2C_2'(x) e^{-x} + C_3'(x)(\cos x - \sin x) + C_4'(x)(\sin x + \cos x) &= -\sin x
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\hline
2C_3'(x)\cos x + 2C_4'(x)\sin x & = & 0 \\[2ex]
C_3'(x)(\cos x + \sin x - \cos x + \sin x) + & & \\[2ex]
C_4'(x)(\sin x - \cos x - \sin x - \cos x) & = & \sin x \\
\hline
2C_3'(x)\cos x + 2C_4'(x)\sin x & = & 0 \\[2ex]
2C_3'(x)\sin x - 2C_4'(x)\cos x & = & \sin x \\
\hline
2C_3'(x)\cos x\sin x + 2C_4'(x)\sin^2 x & = & 0 \\[2ex]
2C_3'(x)\sin x\cos x - 2C_4'(x)\cos^2 x & = & \sin x\cos x \\
\hline
2C_4'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) & = & -\sin x\cos x \\[2ex]
C_4'(x) & = & -\frac{1}{2}\sin x\cos x
\end{array}
$$

Z nedoločenim integriranjem izračunamo vse štiri neznane funkcije:

$$
\begin{aligned}
C_4(x) &= \int -\tfrac{1}{2}\sin x\cos x\,dx = \tfrac{1}{8}\cos(2x) \\
C_3(x) &= \int \tfrac{1}{2}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sin(2x)}{2} + x\right) \\
C_2(x) &= \int -\tfrac{1}{4}e^{x}\sin x\,dx = -\tfrac{1}{8}e^{x}(\sin x - \cos x) \\
C_1(x) &= \int \tfrac{1}{4}e^{-x}\sin x\,dx = -\tfrac{1}{8}e^{-x}(\sin x + \cos x)\,.
\end{aligned}
$$

Tako je

$$y_P = \frac{x\ \cos x}{4} - \frac{3x\ \sin x}{8}$$

in splošna rešitev je

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{x\ \cos x}{4} - \frac{3x\ \sin x}{8}\,.$$

Sedaj znamo poiskati rešitev poljubne linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Pri posebnih oblikah funkcije $f(x)$ lahko za iskanje partikularne rešitve y_P namesto variacije konstant uporabimo določeni tip nastavka, ki hitreje privede do rešitve. Naj bo

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0 = f(x)$$

linearna diferencialna enačba n-tega reda s konstantnimi koeficienti. Pripadajoči karakteristični polinom ima n realnih ali kompleksnih ničel. Na osnovi ničel karakterističnega polinoma dobimo rešitev homogenega dela y_H. Poglejmo si nastavke za iskanje partikularne rešitve y_P glede na obliko funkcije f.

(i) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α ni ničla karakterističnega polnima.

Tu je $P_m(x)$ polinom stopnje m. Partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}\,,$$

kjer je $Q(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu m.

(ii) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α je k-kratna ničla karakterističnega polinoma.

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k\,,$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu m.

(iii) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}\cos(\beta x) + P_{m_2}\sin(\beta x))$, $\alpha \pm i\beta$ ni ničla karakterističnega polnima.

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))\,,$$

kjer sta $Q_m(x)$ in $R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu m in je $m = \max\{m_1, m_2\}$.

(iv) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}\cos(\beta x) + P_{m_2}\sin(\beta x))$, $\alpha \pm i\beta$ je k-kratna ničla karakterističnega polnima.

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))x^k\,,$$

kjer sta $Q_m(x)$ in $R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu m in je $m = \max\{m_1, m_2\}$.

Primer 5.22. *Poiščimo tisto rešitev linearne diferencialne enačbe*

$$y'' - y' = 2(1 - x)\,,$$

ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = 1$ *in* $y'(0) = 1$.

Karakteristični polinom je

$$\lambda^2 - \lambda = 0\,.$$

Njegovi ničli sta

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1\,.$$

Splošna rešitev homogenega dela je

$$y_H = C_1 + C_2\,e^x\,.$$

Pri nastavku za partikularno upoštevamo, da je stopnja polinoma z neznanimi koeficienti ena in da je $\alpha = 0$ enkratna ničla karakterističnega polinoma

$$\begin{aligned} y_P &= (A\,x + B)x\,e^{0\,x} = A\,x^2 + B\,x \\ y_P' &= 2A\,x + B \\ y_P'' &= 2A\,. \end{aligned}$$

Vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} 2A - 2A\,x - B &= 2(1-x) \\ -2A\,x + 2A - B &= -2x + 2 \\ A &= 1 \\ B &= 0\,. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$y_P = x^2\,.$$

Splošna rešitev je

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2\,e^x + x^2\,.$$

Izračunati moramo še obe konstanti in v ta namen potrebujemo odvod rešitve diferencialne enačbe

$$y' = C_2\,e^x + 2x\,.$$

Upoštevamo pogoja in izračunamo iskani konstanti

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) &= C_2 = 1 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Iskana rešitev je

$$y = e^x + x^2\,.$$

5.5 Uporaba diferencialnih enačb

Pogledali si bomo tri uporabe diferencialnih enačb, dve iz fizike in eno iz kemije.

Prosti pad z upoštevanjem zračnega upora

V začetku tega poglavja smo obravnavali modeliranje prostega pada oziroma navpičnega meta, pri čemer nismo upoštevali zračnega upora. Naj bo $F_1 = m\,g$ sila teže in $F_2 = -k\,v^2$ sila zračnega upora, kjer je k koeficient zračnega upora in $v = v(t)$, kot običajno, hitrost padajočega telesa. Po drugem Newtonovem zakonu velja:

$$\begin{aligned}
F &= F_1 + F_2 \\
m\,a &= m\,v - k\,v^2 \\
m\,\frac{d\,v}{d\,t} &= m\,v - k\,v^2 \\
\frac{d\,v}{d\,t} &= v - \frac{k}{m}\,v^2\,.
\end{aligned}$$

Zaradi lažjega integriranja v nadaljevanju vpeljimo $b^2 := \dfrac{m\,g}{k}$ in rešimo diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,v}{d\,t} &= \frac{b^2\,k}{m} - \frac{k}{m}v^2 \\
\frac{d\,v}{d\,t} &= \frac{k}{m}(b^2 - v^2) \\
\int \frac{d\,v}{v^2 - b^2} &= -\int \frac{k}{m}d\,t \\
\frac{1}{2b}\ln\frac{v-b}{v+b} &= -\frac{k}{m}t + C \\
\ln\frac{v-b}{v+b} &= -\frac{2b\,k}{m}t + 2b\,C \\
\frac{v-b}{v+b} &= e^{-\frac{2b\,k}{m}t}e^{2b\,C}, \quad d := \tfrac{2b\,k}{m},\ D := e^{2b\,C} \\
\frac{v-b}{v+b} &= D\,e^{-d\,t} \\
v - b &= D\,e^{-d\,t}(v+b) \\
v(1 - D\,e^{-d\,t}) &= b\,(D\,e^{-d\,t} + 1) \\
v(t) &= b\,\frac{D\,e^{-d\,t} + 1}{1 - D\,e^{-d\,t}}\,.
\end{aligned}$$

Dobili smo splošno rešitev začetnega problema. Če upoštevamo začetni pogoj

$v(0) = v_0$, dobimo partikularno rešitev

$$\begin{aligned} v_0 &= b\,\frac{D+1}{1-D} \\ v_0(1-D) &= b\,(D+1) \\ D &= \frac{v_0-b}{v_0+b}\,, \end{aligned}$$

ki se glasi

$$v(t) = b\,\frac{\frac{v_0-b}{v_0+b}\,e^{-d\,t}+1}{1-\frac{v_0-b}{v_0+b}\,e^{-d\,t}}\,.$$

Če čas t (teoretično) pošljemo v neskončnost, dobimo končno hitrost

$$v_k = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} b\,\frac{D\,e^{-d\,t}+1}{1-D\,e^{-d\,t}} = b = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}\,.$$

Vidimo, da je končna hitrost konstantna.

Do enakega zaključka pridemo z naslednjim sklepanjem. Telo bo začelo padati enakomerno, ko bosta nanj delujoči sili po velikosti nasprotno enaki, to pomeni

$$m\,g = k\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}\,.$$

Primer 5.23. *Padalec, ki skupaj s padalom tehta* 80 *kg, je padalo odprl, ko je že padal s hitrostjo* 10 *m/s. Po preteku 1 minute se mu je hitrost padanja praktično ustalila na* 5 *m/s. Poiščimo koeficient k zračnega upora in hitrost $v(t)$.*

$$\begin{aligned} v_0 &= 10\,m/s \\ v_k &= 5\,m/s \\ m &= 80\,kg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_k &= b = \sqrt{\frac{m\,g}{k}} \Rightarrow \\ k &= \frac{m\,g}{v_k^2} = \frac{80\cdot 10}{25^2} = 32 \\ D &= \frac{v_0-b}{v_0+b} = \frac{10-5}{10+5} = \frac{1}{3} \\ d &= \frac{2k\,b}{m} = \frac{2\cdot 32\cdot 5}{80} = 4 \\ v(t) &= 5\frac{1+\frac{1}{3}\,e^{-4t}}{1-\frac{1}{3}\,e^{-4t}}\,. \end{aligned}$$

Zakon o delovanju mas

Pri konstantni temperaturi velja, da je hitrost kemijske reakcije premosorazmerna produktu koncentracij reaktantov, ki reagirajo. Za dvomolekularno reakcijo

$$A + B \to M$$

naj bo v enem litru a molov snovi A in b molov snovi B. Če je $y = y(t)$ število molov na liter, ki so v času t zreagirali, tedaj je hitrost reakcije določena z

$$\frac{d\,y}{d\,t} = k\,(a-y)(b-y)\,.$$

Poiščimo rešitev te diferencialne enačbe ob predpostavki, da je $a \neq b$ in je $y(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d\,y}{d\,t} &= k\,(a-y)(b-y) \\
\frac{d\,y}{(a-y)(b-y)} &= k\,d\,t
\end{aligned}$$

Razstavimo na parcialne ulomke

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-y)(b-y)} &= \frac{A}{a-y} + \frac{B}{b-y} \\
1 &= A(b-y) + B(a-y) \\
1 &= y(-A-B) + Ab + Ba \\
A + B &= 0 \;\Rightarrow\; A = -B \\
Ab + Ba &= 1 \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{a-b} - A\,.
\end{aligned}$$

Nadaljujmo z reševanjem diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\,y}{(a-y)(b-y)} &= \int k\,d\,t \\
\frac{1}{b-a}\int \frac{d\,y}{a-y} + \frac{1}{a-b}\int \frac{d\,y}{b-y} &= \int k\,d\,t \\
\frac{1}{a-b}\ln(a-y) - \frac{1}{a-b}\ln(b-y) &= k\,t + C \\
\frac{1}{a-b}\ln\frac{a-y}{b-y} &= k\,t + C \\
\frac{a-y}{b-y} &= e^{(a-b)\,k\,t}\,e^{(a-b)\,C} \\
\frac{a-y}{b-y} &= D\,e^{(a-b)\,k\,t} \\
a-y &= D\,e^{(a-b)\,k\,t}(b-y) \\
y(t) &= \frac{D\,b\,e^{(a-b)\,k\,t} - a}{D\,e^{(a-b)\,k\,t} - 1}\,.
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo partikularno rešitev:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \frac{D\,b - a}{D-1} = 0 \;\Rightarrow\; D = \frac{a}{b} \\
y(t) &= \frac{\frac{a}{b}\,b\,e^{(a-b)\,k\,t} - a}{\frac{a}{b}\,e^{(a-b)\,k\,t} - 1} \\
y(t) &= a\,b\,\frac{e^{(a-b)\,k\,t} - 1}{a\,e^{(a-b)\,k\,t} - b}\,.
\end{aligned}$$

Nihanje na spiralni vzmeti

Telo z maso m, ki visi na spiralni vzmeti, v navpični smeri premaknemo za x iz mirujoče lege. Vzmet se upira deformaciji s silo F_1, ki je premosorazmerna z odmikom x:

$$F_1 = -b\,x,\; b > 0\,.$$

Predznak je negativen, ker sila deluje v nasprotni smeri od odmika x. Ko telo spustimo se začne gibati proti mirujoči legi s hitrostjo

$$v = \frac{d\,x}{d\,t} = x'\,.$$

Gibanju telesa se upira snov, v kateri sta telo in vzmet (to je lahko bodisi zrak, plin ali kapljevina), s silo F_2, ki je premosorazmerna s hitrostjo v:

$$F_2 = c\,v = -c\,x'\,,\ c > 0\,.$$

Po drugem Newtonovem zakonu velja

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ m\,a &= -b\,x - c\,x' \\ m\,x'' &= -b\ - c\,x' \\ x'' + \frac{c}{m}\,x' + \frac{b}{m}\,x &= 0\,. \end{aligned}$$

Dobili smo diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Za lažje reševanje vpeljimo

$$\frac{c}{m} := 2\,k \quad \text{in} \quad \frac{b}{m} := \omega^2\,.$$

Sedaj rešujemo diferencialno enačbo

$$x'' + k\,x' + \omega^2\,x = 0\,.$$

Poiščimo ničli karakterističnega polinoma

$$\begin{aligned} \lambda^2 + k\,\lambda + \omega^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega^2}}{2} &= -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}\,. \end{aligned}$$

Glede na odnos med k in ω ločimo tri možnosti (naj bo $r^2 := k^2 - \omega^2$):

(i) $k^2 > \omega^2$

V tem primeru imamo dve različni realni ničli karakterističnega polinoma

$$\lambda_{1,2} = -k \pm r$$

in rešitev diferencialne enačbe je

$$x(t) = C_1\,e^{(-k+r)\,t} + C_2\,e^{(-k-r)\,t}\,.$$

(ii) $k^2 < \omega^2$

V tem primeru imamo konjugirani kompleksni ničli karakterističnega polinoma

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i\,r$$

in rešitev diferencialne enačbe je

$$x(t) = C_1\,e^{-k\,t}\,\cos(r\,t) + C_2\,e^{-k\,t}\,\sin(r\,t)\,.$$

(iii) $k^2 = \omega^2$

V tem primeru imamo dvojno realno ničlo karakterističnega polinoma

$$\lambda_{1,2} = -k$$

in rešitev diferencialne enačbe je

$$x(t) = C_1\, e^{-k\,t} + C_2\, e^{-k\,t}\, t\,.$$

Če na vzmet delujemo s periodično zunanjo silo

$$F = F_0\, \sin(\beta\, t)\,,$$

dobimo nehomogeno diferencialno enačbo

$$x'' + k\, x' + \omega^2\, x = F_0\, \sin(\beta\, t)\,.$$

5.6 Naloge

Diferencialne enačbe prvega reda

1. Nariši izokline in določi smerno polje za DE

$$y' - y = -\frac{1}{2}\,.$$

2. Nariši izokline in določi smerno polje za DE

$$y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}\,.$$

3. Z Eulerjevo metodo poišči rešitve DE

$$(1 + x^2)y' = 1 - 2y$$

na intervalu $[-1, 0]$, če je $y(-1) = -1$ in upoštevamo $h = 0.2$.

4. Poišči splošno rešitev DE

$$y' = -\frac{x}{y}\,.$$

5. Reši DE

$$xy + (x + 1)y' = 0\,.$$

6. Reši DE
$$xy' - y = y^3 \, .$$

7. Poišči tisto rešitev DE
$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) \, ,$$
ki zadošča začetnemu pogoju $y(1) = \mathrm{e}^2$.

8. Poišči splošno rešitev DE
$$xy' = y + x\mathrm{tg}\frac{y - 2x}{x} \, .$$

9. Poišči tisto rešitev DE
$$-xy' + 4y + 2x^5\mathrm{e}^x = 0 \, ,$$
ki poteka skozi točko $T(1, 1)$.

10. Poišči tisto rešitev DE
$$xy' + y = x^2 \ln x \, ,$$
ki zadošča začetnemu pogoju $y(1) = 0$.

11. Poišči splošno rešitev $x = x(t)$ DE
$$t(1 + t^2)dx = (x + xt^2 - t^2)dt \, .$$

12. S pomočjo substitucije $z = \sin y$ poišči splošno rešitev DE
$$y' + \mathrm{tg}y = \frac{x}{\cos y} \, .$$

13. Poišči splošno rešitev DE
$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 \sqrt[3]{y} \, .$$

14. Poišči tisto rešitev DE
$$xy^2y' = x^2 + y^3 \, ,$$
ki gre skozi točko $T(1, 0)$.

15. Poišči splošno rešitev DE
$$3y' \cos x + y \sin x - \frac{1}{y^2} = 0 \, .$$

16. Poišči tisto rešitev DE
$$xy' \ln x = y - xy^2 \, ,$$
ki gre skozi točko $T(\mathrm{e}, \frac{1}{2\mathrm{e}})$.

17. Poišči splošno rešitev DE

$$y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$$

s pomočjo subsitucije $z = y - x$.

18. Dana je DE

$$y' + 2y + y^2 = \frac{2}{x^2} - 1\,.$$

a) Poišči partikularno rešitev dane DE, če veš, da je oblike

$$y = \frac{ax+2}{x}\,.$$

b) Poišči splošno rešitev dane DE.

19. Poišči krivuljo, katere tangenta seka abscisno os v točki, ki je enaka kvadratu abscise dotikališča tangente in krivulje.

20. Krivulja $y = y(x)$ leži v prvem kvadrantu. V točki $T(x, y)$ krivulje narišemo tangento in ordinato. Trapez, ki ga oklepajo tangenta, ordinata in obe koordinatni osi ima ploščino $3a^2$. Za katero krivuljo gre?

Diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

1. Poišči splošno rešitev DE:

a) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$,

b) $y''' - 8y = 0$.

2. Poišči splošno rešitev DE:

a) $y'' - 2y' + y = 3\mathrm{e}^{2x}$,

b) $y'' + y = x^2 + x$.

3. Poišči tisto rešitev DE

$$y'''' + y'' = 7x\,,$$

ki zadošča pogojem

$$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{2},\ y'''(\frac{\pi}{2}) = 8\,.$$

4. Poišči splošno rešitev DE

$$y'' + y' - 2y = 2x\mathrm{e}^{-2x} + 3x\,.$$

5. Poišči splošno rešitev DE

$$x'' - 5x' + 4x = \mathrm{ch}t\,.$$

6. Poišči tisto rešitev DE
$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,,$$
ki zadošča pogojema $y(1) = 0$ in $y'(1) = 1$.

7. Poišči splošno rešitev DE
$$y'' - 4y' + 5y = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}\,.$$

8. Poišči splošno rešitev DE
$$y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

9. Poišči splošno rešitev DE
$$y''' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln x\,.$$

10. Poišči splošno rešitev DE
$$y^{(4)} + y''' = 12x^2\,.$$

11. Poišči splošno rešitev DE
$$y^{(4)} + y''' - y'' - y' = 4\mathrm{e}^x\,.$$

Poglavje 6

Uvod v linearno algebro

V tem poglavju bomo naredili preskok iz matematične analize, s katero smo se do sedaj ukvarjali, v algebro. Spoznali bomo matrike, še posebej nas bo zanimala obratna matrika in zato potrebujemo pojem determinante. Nadalje nas bodo zanimali sistemi linearnih enačb in pogledali si bomo dva načina za njihovo reševanje. Spoznali bomo preprost primer vektorskega prostora in se naučili iskati lastne vrednosti in lastne vrednosti matrike.

6.1 Matrike

V tem razdelku bomo definirali matriko, pogledali računske operacije z matrikami in se v nadaljevanju osredotočili na kvadratne matrike in v zvezi s tem na obratno matriko.

Tabela števil

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

se imenuje *pravokotna matrika*, če je $n \neq m$ in *kvadratna matrika*, če je $n = m$. Števila, ki sestavljajo matriko, so *elementi matrike*. Elementi so lahko realna ali kompleksna števila. V nadaljevanju naj bo $\mathcal{O}$ obseg realnih ali kompleksnih števil.

Za vsak $i = 1, ..., n$ je

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ ... \ a_{im}]$$

i-ta vrstica matrike A in za vsak $j = 1, ..., m$ je

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

j-ti stolpec matrike A. Za matriko z n vrsticami in m stolpci pravimo, da je *reda* $n \times m$. Element a_{ij} matrike A pišemo tudi kot

$$a_{ij} = (A)_{ij}\,.$$

Matriki A in B sta enaki natanko tedaj, ko sta enakega reda in imata enake istoležne elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (A)_{ij} = (B)_{ij}$$

za vsak $i = 1, ..., n$ in $j = 1, ..., m$.

Poglejmo, kako računamo z matrikami.

(i) *Seštevanje matrik*

Naj bosta A in B matriki reda $n \times m$. Njuna vsota je matrika $A + B$, pri čemer je

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m\,.$$

Očitno je vsota matrik enakega reda kot oba sumanda, to je $n \times m$.

Primer 6.1. *Poiščimo vsoto matrik A in B, če je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad in \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Seštevanje matrik je komutativno, saj je seštevanje v obsegu $\mathcal{O}$ komutativno. Velja torej

$$A + B = B + A \tag{6.1}$$

in ker v $\mathcal{O}$ velja tudi asociativnost seštevanja, je seštevanja matrik tudi asociativna operacija

$$A + (B + C) = (A + B) + C\,. \tag{6.2}$$

(ii) *Množenje matrik*

Naj bo A matrika reda $k \times n$, B pa matrika reda $n \times m$. Pomnožimo i-to vrstico matrike A z j-tim stolpcem matrike B na sledeč način:

$$[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ ...\ \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,.$$

Dobljeno vsoto imenujemo *skalarni produkt* i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. Produkt matrike A reda $k \times n$ in matrike B reda $n \times m$ označimo AB, pri čemer je

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

in gre $i = 1, ..., k$ ter $j = 1, ..., m$. Torej, ij-ti element produkta AB je skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. Produkt AB je torej reda $k \times m$.

Primer 6.2. *Matriki iz Primera 6.1 ne moremo množiti zaradi neustreznih redov. Naj bo torej A matrika iz Primera 6.1, matrika B pa naj bo podana kot*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkt matrik A in B.

Produkt je enak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Iz primera je razvidno, da produkt BA sploh ni definiran. Poglejmo še produkt dveh matrik enakih redov. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tedaj sta definirana oba produkta

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

in

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 17 & 22 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da četudi sta definirana oba produkta, nista (nujno) enaka. Množenje matrik v splošnem ni komutativna operacija

$$AB \neq BA.$$

Velja pa asociativnost množenja

$$A(BC) = (AB)C. \tag{6.3}$$

Lastnost velja iz podobnih razlogov kot pri seštevanju. Je namreč posledica asociativnosti množenja v obsegu $\mathcal{O}$ in definicije množenja matrik. Podrobnosti so prepuščene bralcu.

(iii) *Množenje s skalarjem*

Skalarji so elementi iz obsega $\mathcal{O}$. Matriko A množimo s skalarjem $\lambda \in \mathcal{O}$ tako, da pomnožimo z λ vsak element matrike A

$$\lambda A \;=\; \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Bralec naj se sam prepriča, da za množenje s skalarjem veljajo naslednje lastnosti:

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \tag{6.4}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \tag{6.5}$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B \quad \text{in} \tag{6.6}$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A. \tag{6.7}$$

Poleg navedenih lastnosti veljata še obe distributivnost množenja matrik glede na seštevanje

$$A(B + C) = AB + AC \tag{6.8}$$

in

$$(B + C)A = BA + CA. \tag{6.9}$$

Ker morata obstajati tako produkta AB in BA, kot tudi AC in CA, morajo biti matrike A, B, C ustreznih redov. Naj bo A reda $n \times m$, tedaj morata biti matriki B in C obe redov $m \times k$. Rezultat je reda $n \times k$. Preverimo samo lastnost (6.8). Lastnost (6.9) preverimo zelo podobno in to lahko stori bralec sam.

$$\begin{aligned}
(AB + BC)_{ij} &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\
&= \textstyle\sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{kr} + \sum_{kr}^{n} a_{ir} c_{rj} \\
&= \textstyle\sum_{r=1}^{n} (a_{ir} b_{rj} + a_{ir} c_{rj}) \\
(B + C)_{ij} &= (B)_{ij} + (C)_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \\
(A(B + C))_{ij} &= \textstyle\sum_{r=1}^{n} a_{ir} (b_{rj} + c_{rj}) \\
&= \textstyle\sum_{r=1}^{n} (a_{ir} b_{rj} + a_{ir} c_{rj})
\end{aligned}$$

Nasprotna matrika, $-A$, matrike A je produkt matrike A s skalarjem -1

$$-A = (-1)A. \tag{6.10}$$

Razlika matrik A in B, $A-B$, je vsota matrike A in nasprotne matrike matrike B

$$A-B=A+(-B)\,.$$

Naj bo A matrika reda $n\times m$. Tedaj je njena *transponirana matrika* A^T matrika reda $m\times n$, ki jo dobimo iz A tako, da zamenjamo vrstice in stolpce:

$$(A^T)_{ij}=(A)_{ji},\ \forall\, i=1,...,m \quad \text{in} \quad j=1,...,n. \tag{6.11}$$

Ničelna matrika O je matrika, ki ima za elemente same ničle

$$\mathrm{O} \ = \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.12}$$

Naj bo sedaj A kvadratna matrika ($m=n$). Če ima A n stolpcev oziroma vrstic pravimo, da je *reda* n. Elemente a_{ii}, $i=1,...,n$, kvadratne matrike A imenujemo *diagonalni elementi* in sestavljajo *glavno diagonalo* matrike A.

Kvadratna matrika je *zgornje trikotna*, če je $a_{ij}=0$ za vsak $i>j$ in pravimo, da je *spodnje trikotna*, če je $a_{ij}=0$ za vsak $i<j$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \ \text{zgornje trikotna matrika}\,,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \ \text{spodnje trikotna matrika}\,.$$

Matrika, ki je zgornje in obenem tudi spodnje trikotna, je *diagonalna matrika*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \ \text{diagonalna matrika}\,,$$

Diagonalna matrika, za katero je $a_{ii}=1$ za vsak i, je *enotska matrika* I:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \ \text{enotska matrika}\,.$$

Bralec naj sam preveri, da za vsako kvadratno matriko A velja

$$IA = AI = A. \tag{6.13}$$

To pomeni, da je enotska matrika I enota za množenje v množici matrik.

Če v kvadratni matriki A za vsak i in j velja $a_{ij} = a_{ji}$, tedaj je A *simetrična* in velja

$$A^T = A\,.$$

Če pa je v kvadratni matriki A za vsak i in j izpolnjen pogoj $a_{ij} = -a_{ji}$, tedaj je A *poševno simetrična* in velja

$$A^T = -A\,.$$

Naj bo $\mathcal{M}_n = \{A; A\,\mathrm{reda}\,n,\ (A)_{ij} \in \mathcal{O}\}$.

V nadaljevanju bomo definirali pomemben pojem v zvezi s kvadratnimi matrikami in sicer je to obratna matrika.

Definicija 6.3. *Matrika B je* obratna *ali* inverzna matrika *matrike A, če velja*

$$AB = BA = I\,.$$

Obratno matriko matrike A označimo z A^{-1}.

Primer 6.4. *Poiščimo obratno matriko matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Naj bo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Veljati mora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ & \\ -a-c & -b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a + c = 1$$

$$b + d = 0$$

$$-a - c = 1$$

$$-b - 2d = 0$$

$$c = d = -b = \frac{1}{3},\ a = \frac{2}{3}\,.$$

Torej je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izrek 6.5. *Če obstaja obratna matrika matrike A, je le-ta enolično določena.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, recimo da obstajata dve različni obratni matriki B in C matrike A. Tedaj velja

$$AB = BA = I$$

in

$$AC = CA = I\,.$$

Tedaj velja

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C\,,$$

kar je v protislovju z $B \neq C$. ∎

Definicija 6.6. *Matrika je* obrnljiva, *če obstaja njej obratna matrika.*

Za množenje obrnljivih matrik velja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Izpeljimo to lastnost:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AIA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I\,. \end{aligned}$$

6.2 Računanje determinante matrike

O determinanti ne bomo veliko povedali. Uporabljali jo bomo pri izračunu obratne matrike in pri reševanju sistemov linearnih enačb. Definicija determinante, ki jo bomo podali v tem razdelku, je kar se da poenostavljena. Zelo ohlapno povedano, je determinanta število, ki ga priredimo kvadratnim matrikam. Induktivno bomo podali definicijo determinante kvadratne matrike A, ki jo označimo $\det(A)$ in jo pišemo podobno kot samo matriko, le da namesto oglatih oklepajev uporabimo ravne črte.

Determinanta matrike A reda dva je definirana kot produkt elementov glavne diagonale, od katerih odštejemo produkt preostalih elementov:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Primer 6.7. *Izračunajmo determinanto matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 1 = 9\,.$$

Determinanta matrike reda tri je definirana kot:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})\,.$$

Do determinante matrike reda tri pridemo preko determinant matrik reda dva in sicer tako, da determinanto večje matrike razvijemo po vrstici ali stolpcu na vsoto determinant matrik za ena nižjega reda. Pri tem determinanto matrike nižjega reda imenujemo *poddeterminanta*. Poglejmo si razvoj po prvi vrstici:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{poddet.}|A_{11}|} + (-1)^{1+2}a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{poddet.}|A_{12}|} + (-1)^{1+3}a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\text{poddet.}\,|A_{13}|}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\,.$$

Poddeterminanto $|A_{ij}|$ dobimo tako, da v determinanti matrike A prečrtamo in zanemarimo celotno i-to vrstico in j-ti stolpec. To, kar ostane, je poddeterminanta $|A_{ij}|$.

Primer 6.8. *Izračunajmo determinanto matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 12\,. \end{aligned}$$

Zaenkrat smo determinanto matrike A reda tri računali z razvojem po prvi vrstici in sicer preko poddeterminant $|A_{ij}|$, kjer je $j = 1, 2, 3$. Toda determinanto matrike A bi lahko računali s pomočjo razvoja po katerikoli vrstici ali stolpcu. Predznak poddeterminante $|A_{ij}|$ določa predznak $(-1)^{i+j}$.

Tako bi lahko determinanto iz Primera 6.8 na drugačen način izračunali s pomočjo razvoja po na priemr tretjem stolpcu, kar vidimo na Primeru 6.9.

Primer 6.9. *Izračunajmo determinanto matrike A iz Primera 6.8 s pomočja razvoja po drugem stolpcu.*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 12\,. \end{aligned}$$

Postopek lahko posplošimo na računanje determinante kvadratne matrike poljubnega reda. Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če determinanto matrike A izračunamo z razvojem po i-ti vrstici, (i je katerokoli število med 1 in n), tedaj za vsak $r = 1, 2, ..., n$ element a_{ir} pomnožimo s pripadajočo poddeterminanto $|A_{ir}|$, katere predznak je določen z $(-1)^{i+r}$. Determinanta matrike A je definirana kot vsota produktov elementov i-te vrstice s pripadajočimi poddeterminantami:

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} |A_{ir}|\,.$$

Podobno lahko determinanto matrike A izračunamo s pomočjo razvoja po j-tem stolpcu

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{rj} |A_{rj}|\,.$$

Za izračun determinante je najugodnejši izbor vrstice ali stolpca s čim večjim številom ničel, saj ti členi odpadejo iz vsote.

Opazimo, da je determinanta trikotnih in diagonalnih matrik enaka produktu diagonalnih elementov.

Navedimo (brez dokazov) nekaj lastnosti determinante:

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) $\det(A) = \det(A^T)$.

(iii) Če v matriki med seboj zamenjamo dve vrstici (stolpca), se spremeni predznak determinante.

(iv) Če vrstici prištejemo (odštejemo) večkratnik katere druge vrstice (stolpca), se vrednost determinante ne spremeni.

(v) Če imajo v matriki v kakšni vrstici (stolpcu) vsi elementi skupen faktor, lahko le-tega izpostavimo iz determinante.

(vi) Če sta v matriki dve vrstici (stolpca) enaki ali je ena večkratnik druge, je determinanta matrike enaka 0.

(vii) Če ima matrika kakšno ničelno vrstice (stolpec), je determinanta enaka 0.

Definicija 6.10. *Matrika $\widehat{A}$ je* prirejenka *matrike A, če je*

$$(\widehat{A})_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|\,.$$

Primer 6.11. *Izračunajmo prirejenko $\widehat{A}$ matrike A iz Primera 6.7 ter izračunaj $A\widehat{A}$.*

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

in

$$A\widehat{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = det(A)I\,.$$

V nadaljevanju pokažimo lemo, ki bo potrebna v dokazu naslednjega izreka.

Lema 6.12. *Za $j \neq i$ je*

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{j+r} a_{ir} |A_{jr}| = 0\,.$$

Dokaz. Naj bo A matrika z elementi a_{ij}. Matriki A priredimo matriko A' z elementi ${a'}_{ij}$ tako, da v matriki A namesto j-te vrstice napišemo i-to vrstico, ostalih vrstic pa ne spreminjamo. S tem ima matrika A' dve enaki vrstici in je njena determinanta enaka 0. Zapišimo determinanto matrike A' z razvojem po j-ti vrstici:

$$0 = \det(A') = \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{j+r}a'_{jr}|A'_{jr}| = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{j+r}a_{ir}|A_{jr}|\,.$$

∎

Izrek 6.13. *Matrika A je* obrnljiva *natanko tedaj, ko je* $\det(A) \neq 0$.

Dokaz. Izpeljimo dokaz v obe smeri.

($\Rightarrow$) Naj bo A obrnljiva, torej naj obstaja A^{-1}. Tedaj je $AA^{-1} = I$ in velja

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I) \\ &= \det(AA^{-1}) \\ &= \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A) \neq 0\,. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Naj bo sedaj $\det(A) \neq 0$. Pokažimo, da velja

$$A\widehat{A} = \det(A)I\,,$$

kar pomeni, da moramo pokazati:

$$\begin{aligned} (A\widehat{A})_{ii} &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(\widehat{A})_{ri} \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(-1)^{r+i}|A_{ir}| \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+i}a_{ir}|A_{ir}| \\ &= \det(\mathrm{A})\,. \end{aligned}$$

in za $i \neq j$ imamo

$$\begin{aligned} (A\widehat{A})_{ij} &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(\widehat{A})_{rj} \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(A)_{ir}(-1)^{r+j}|A_{jr}| \\ &= \textstyle\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+j}a_{ir}|A_{jr}| \\ &\underbrace{=}_{Lema\ 6.12} 0\,. \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(A)} A\widehat{A} &= I \quad \text{ali} \\ A\left(\frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\right) &= I \end{aligned}$$

od koder sledi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\,.$$

∎

Iz dokaza Izreka 6.13 neposredno sledi posledica.

Posledica 6.14. *Če je A obrnljiva, tedaj je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\,.$$

Obrnljivim matrikam pravimo tudi *regularne matrike*.

Primer 6.15. *Izračunajmo obratno matriko matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanto izračunamo z razvojem po prvem stolpcu:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo elemente prirejenke:

$$(\widehat{A})_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad (\widehat{A})_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad (\widehat{A})_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$(\widehat{A})_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad (\widehat{A})_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad (\widehat{A})_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$(\widehat{A})_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad (\widehat{A})_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad (\widehat{A})_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\,.$$

Zato je prirejenka enaka

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & 5 \\ 8 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

in obratna matrika je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{8} & \dfrac{3}{8} \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{8} & \dfrac{5}{8} \\ \\ 1 & -\dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Primer 6.16. *Izračunajmo obratno matriko matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Njena prirejenka je

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 9 & -6 & 4 \\ 12 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

in ker je $\det(A) = 1$, je $A^{-1} = \widehat{A}$.

6.3 Sistemi linearnih enačb

Cilj tega razdelka je sistematično reševanje sistemov linearnih enačb. Linearne enačbe so tiste, v katerih neznanke nastopajo samo v prvi potenci, na primer:

$$2x - 5 = 0,\ 2x + 3y = 0,\ 3y = 2z \ldots$$

Spoznali bomo dva načina reševanja sistemov linearnih enačb in sicer Gaussovo eliminacijsko metodo in Cramerjevo pravilo. Kot poseben primer Gausove eliminacije bomo pogledali še tretji način za izračun obratne matrike.

Za motivacijo rešimo naslednje sisteme dveh enačb z dvema neznankama.

1.
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

$$x = 1, y = 1\,.$$

Dobili smo enolično rešitev.

2.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 2\\
2 + 2y &= 4\\
\\
x + y &= 2\,.
\end{aligned}
$$

Dobili smo neskončno rešitev oziroma enoparametrično rešitev (vse točke na premici $y = -x + 2$).

3.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 2\\
2x + 2y &= 5\\
\\
0 &= 1\,.
\end{aligned}
$$

V tem primeru ni rešitve.

Opazimo, da lahko pri sistemih linearnih enačb pričakujemo tri različne izide:

- enolična rešitev,
- neskončno rešitev,
- ni rešitve.

V splošnem bomo reševali sistem m linearnih enačb z n neznankami:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,.
\end{array}
$$

Pri tem so a_{ij} in b_i, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, znani elementi iz obsega realnih ali kompleksnih števil, $x_1, x_2, ..., x_n$ pa iskane neznanke.
Če vpeljemo

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix},
$$

lahko sistem m linearnih enačb z n neznankami v matrični obliki zapišemo kot

$$
Ax = b\,.
$$

Spoznali bomo dva načina reševanja linearnih sistemov:

- Gaussovo eliminacijsko metodo in

- Cramerjevo pravilo (uporabno le, ko je $n = m$ in je sistem enolično rešljiv).

Obe metodi si poglejmo natančneje.

(i) *Gaussova eliminacijska metoda*

Naj bo $[A, b]$ razširjena matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da ji na desni strani dodamo stolpec vrednosti b:

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Naš cilj je transformirati razširjeno matriko $[A, b]$ tako, da bo njena desna stran, to je matrika A, zgornje trikotna matrika. Taki obliki matrike pravimo *stopničasta oblika*. V ta namen lahko uporabljamo osnovne transformacije, ki ne spremenijo rešitev sistema linearnih enačb. Ta postopek imenujemo *Gaussova eliminacijska metoda.*

Osnovne vrstične transformacije so:

(i) zamenjava dveh vrstic,

(ii) poljubno vrstico pomnožimo z neničelnim realnim številom,

(iii) poljubni vrstici prištejemo ali odštejemo večkratnik druge vrstice.

Poleg osnovnih vrstičnih transformacij poznamo še *osnovne stolpčne transformacije*, ki so analogne vrstičnim, le da jih izvajamo na stolpcih. Medtem ko osnovne vrstične transformacije ne spremenijo rešitve sistema linearnih enačb, je treba biti pri osnovnih stolpčnih transformacijah previdnejši, saj se v primeru zamenjave stolpcev spremeni vrstni red neznank.

Z osnovnimi transformacijami naredimo stopničasto obliko razširjene matrike $[A, b]$:

$$[A, b] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right].$$

Sedaj ločimo dve vrsti neznank in sicer so

$$x_1, x_2, ..., x_j$$

vezane neznanke in
$$x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_n$$
so *proste neznanke.*

Če niso vse vrednosti
$$b_{r+1}, b_{r+2}, ...b_m$$
enake 0, tedaj sistem nima rešitve. Zanimajo nas samo sistemi, kjer so $b_k = 0, k = r+1, ..., m$. V tem primeru lahko spodnje ničelne vrstice enostavno zanemarimo. Rešitev dobimo tako, da vezane neznanke izrazimo s prostimi in pravimo, da smo dobili $m - r$ parametrično rešitev sistema.

Primer 6.17. *Rešimo sistem linearnih enačb*
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & + & 3\,x_5 & = & 13 \\ & & & & x_3 & - & 3\,x_4 & + & 6\,x_5 & = & 5 \\ & & & & & - & x_4 & + & x_5 & = & -1\,. \end{array}$$

Če izvedemo osnovno stolpčno transformacijo in damo prvi stolpec na zadnje mesto, že imamo stopničasto obliko:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & + & 3\,x_5 & + & x_1 & = & 13 \\ & & x_3 & - & 3\,x_4 & + & 6\,x_5 & & & = & 5 \\ & & & - & x_4 & + & x_5 & & & = & -1\,. \end{array}$$
Torej sta x_1 in x_5 prosti spremenljivki, preostale so vezane in jih izrazimo s prostima. Naj bo $x_1 = t$ in $x_5 = s$. Tedaj lahko rešitev zapišemo kot
$$x = \begin{bmatrix} t \\ 3-t-2s \\ 8-3s \\ 1+s \\ s \end{bmatrix},\ t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Definicija 6.18. *Rang matrika A, rang(A), je število neničelnih vrstic po končani Gaussovi eliminaciji.*

Primer 6.19. *Poiščimo rang matrike, ki pripada sistemu linearnih enačb iz Primera 6.17.*

Stopničasta oblika matrika A, ki pripada temu sistemu je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
zato je
$$\operatorname{rang}(A) = 3\,.$$

Velja naslednja trditev, ki je ne bomo izpeljali.

Trditev 6.20. *Osnovne tranformacije ne spremenijo ranga matrike.*

Vrsto rešitev sistema linearnih enačb glede na rang pripadajoče matrike podaja naslednji izrek, ki ga prav tako ne bomo dokazali.

Izrek 6.21. *Naj bo $A\,x = b$ sistem m linearnih enačb z n neznankami.*

i) *Če je rang$(A) =$ rang$([A, b]) = n$, tedaj ima sistem enolično rešitev.*

ii) *Če je rang$(A) \neq$ rang$([A, b])$, tedaj sistem nima rešitve.*

iii) *Če je rang$(A) =$ rang$([A, b]) = k < n$, tedaj ima sistem $n-k$ parametrično rešitev.*

V primeru, ko število enačb in neznank sistema linearnih enačb $A\,x = b$ sovpadata ($n = m$) in je rešitev sistema enolična, lahko z Gaussovo eliminacijo dosežemo *normalizirano diagonalno obliko* matrike A. To pomeni, da izvajamo osnovne transformacije najprej pod diagonalo in nato nad diagonalo, dokler ni leva stran razširjene matrike $[A, b]$ enotska matrika reda n:

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n' \end{array}\right].$$

Desni stolpec je potemtakem rešitev sistema.

Primer 6.22. *Rešimo sistem*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2\,. \end{array}$$

$$\begin{aligned} [A, b] &= \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \\ &\approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \\ &\approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Tako je rešitev

$$x = \left[\begin{array}{r} 6 \\ -1 \\ 3 \end{array}\right].$$

Do sedaj smo obratno matriko izračunali direktno preko sistema linearnih enačb in s pomočjo prirejenke, poznamo pa še tretji način, ki je posledica Gaussove eliminacije.

Matriki A priredimo razširjeno matriko $[A, I]$ tako, da na desno stran napišemo enotsko matriko enakega reda:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Najprej s pomočjo osnovnih vrstičnih transformacij predelamo prvi stolpec v tako obliko, da je v prvi vrstici 1, v vseh ostalih pa 0:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Ostali elementi se zaradi vrstičnih transformacij spreminjajo, zato so označni z zvezdicami. Nato v drugem stolpcu naredimo na diagonali 1, in pod diagonalo 0:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Postopek ponovimo za vsak stolpec tako, da imamo na diagonali 1, pod diagonalo pa 0. Po kvečjemu n korakih pridelamo matriko:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & * & * & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 1 & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Sedaj vse skupaj ponovimo nad glavno diagonalo. Najprej v zadnjem stolpcu naredimo ničle nad diagonalo, kjer je enica:

$$
[A,I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & * & * & * & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
0 & 1 & 1 & * & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & *
\end{array}\right].
$$

Postopek ponovimo za vse stolpce od zadaj naprej in po kvečjemu $n-1$ korakih ima razširjena matrika obliko:

$$
[A,I] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & *
\end{array}\right].
$$

Matrika, ki smo jo dobili na desni strani, je obratna matrika A^{-1}. Če se zgodi, da tekom transformacij naletimo na ničelno vrstico ali stolpec, postopka ne moremo nadaljevati in obratna matrika ne obstaja.

Primer 6.23. *Izračunajmo obratno matriko matrike A iz Primera 6.16 s pomočjo razširjene matrike $[A,I]$.*

$$
\begin{aligned}
[A,I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
-2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -5 & 4 & 3 & -2 & 0 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]. \\
&\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 12 & -8 & 5
\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 0 & 23 & -15 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 9 & -6 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 12 & -8 & 5
\end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 9 & -6 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 12 & -8 & 5
\end{array}\right].
\end{aligned}
$$

(ii) Cramerjevo pravilo

Uporabimo ga lahko samo za reševanje enolično rešljivih sistemov n linearnih enačb z n neznankami (sistem reda n).

Izrek 6.24. *Sistem $Ax = b$ je enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Rešitev sistema se izraža kot*

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \ i = 1, 2, ..., n\,.$$

Dokaz.

Ker je po Izreku 6.13 determinanta matrike A različna od 0 natanko tedaj, ko je A obrnljiva, že imamo enolično rešitev sistema:

$$x = A^{-1}\, b\,.$$

Pokažimo še, kako se izraža rešitev x sistema $Ax = b$.

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\,b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \dots & \widehat{a}_{1n} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \dots & \widehat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{a}_{n1} & \widehat{a}_{n2} & \dots & \widehat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Vemo, da je so elementi prirejenke $\widehat{A}$ enaki

$$\widehat{a}_{ir} = (-1)^{i+r}|A_{ri}|\,.$$

Poglejmo i-to komponento rešitve x:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\sum_{r=1}^{n}\widehat{a}_{ir}b_r = \frac{1}{\det(A)}\underbrace{\sum_{r=1}^{n}(-1)^{i+r}b_r|A_{ri}|}_{\text{razvoj po } i\text{–ti vrstici}}\ ,$$

kar je ravno determinanta matrike iz izreka. ∎

Primer 6.25. *Rešimo sistem*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

Najprej moramo izračunati

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1\,.$$

Izračunajmo x_1:

$$x_1 \;=\; \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6\,.$$

Na podoben način izračunamo $x_2 = -1$ in $x_3 = -3$.

Poseben primer sistemov so *homogeni sistemi linearnih enačb*:

$$A\,x = 0\,.$$

A in x sta enaka kot prej, 0 pa je stolpec s samimimi ničlami.

Primer homogenega sistema je

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 8\,x_4 & = & 0 \\ 9\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & 11\,x_3 & + & 12\,x_4 & = & 0 \\ -\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & 0\,. \end{array}$$

Opazimo, da ima vsak homogeni sistem ničelno rešitev $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Tej rešitvi pravimo *trivialna rešitev* homogenega sistema linearnih enačb.

Izrek 6.26. *Homogeni sistem linearnih enačb reda n je netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je* $\det(A) = 0$.

Dokaz. Izrek 6.24 (Cramerjevo pravilo) pravi, da je sistem $A\,x = 0$ enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Ker je trivialna rešitev vedno rešitev homogenega sistema linearnih enačb, v primeru, ko je $\det(A) \neq 0$ nimamo nobene druge rešitve. Torej, če želimo netrivialno rešitev, mora biti $\det(A) = 0$. ∎

Primer 6.27. *Poiščimo rešitve zgoraj zapisanega homogenega sistema linearnih enačb.*

Zapišimo sistem v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

S postopkom Gaussove eliminacije dobimo stopničasto razširjeno matriko (podrobnosti so prepuščene bralcu):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev sistema je $x_2 = -2\,x_3 - 3\,x_4$ in $x_1 = x_3 + 2x_4$. Naj bo $x_3 = s$ in $x_4 = t$, kjer sta $s, t \in \mathbb{R}$. Tedaj je rešitev homogenega sistema vsak vektor oblike

$$\begin{bmatrix} s + 2\,t \\ -2\,s - 3\,t \\ s \\ t \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Vidimo, da smo dobili netrivialno rešitev in bralec naj sam preveri, da je $\det(A) = 0$.

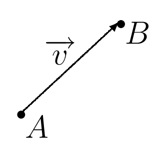
6.4 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Spoznali bomo osnovni primer vektorskega prostora in razložili nekatere pojme v povezavi s tem. Predvsem nas bo zanimala baza vektorskega prostora in linearna odvisnost oziroma neodvisnost vektorjev.

Ponovimo definicijo vektorja v ravnini in v trirazsežnem prostoru. *Vektor* lahko geometrijsko prikažemo z usmerjeno daljico z začetkom v točki A in koncem v točki B. Točko A imenujemo *začetna točka* in B *končna točka*. Vektorje običajmo označujemo z malimi tiskanimi črkami, nad katerimi narišemo puščico. Vektor $\overrightarrow{v}$ med točkama A in B zapišemo

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}\,,$$

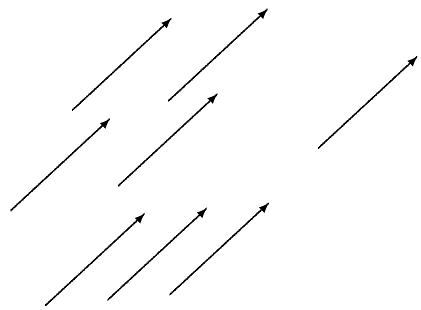
kot je razvidno s Slike 6.1.



Slika 6.1: Vektor med točkama A in B.

Vektor vsebuje dve informaciji in sicer smer ter velikost. Vektorje z enako smerjo in velikostjo med seboj ne ločimo, ampak jih smatramo za enake (*glej Sliko 6.2*).

Poglejmo si, kako računamo z vektorji.



Slika 6.2: Enaki vektorji.

(i) *Množenje s skalarjem*

Če je $\lambda > 0$ pozitivno realno število in $\overrightarrow{v}$ poljuben vektor, potem je $\lambda \overrightarrow{v}$ vektor, ki je enako usmerjen kot vektor $\overrightarrow{v}$, njegova dolžina pa je za faktor λ daljša (če je $\lambda > 1$) oziroma krajša (če je $\lambda < 1$) od vektorja $\overrightarrow{v}$. Za negativne skalarje $\lambda < 0$ je vektor $\lambda \overrightarrow{v}$ nasprotno usmerjen kot vektor $\overrightarrow{v}$, po velikosti pa je enak vektorju $|\lambda| \overrightarrow{v}$.

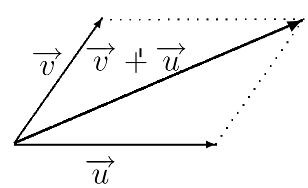
Poglejmo si lastnosti množenja s skalarjem. Naj bosta λ in μ poljubna skalarja ter $\overrightarrow{v}$ vektor. Tedaj velja

I. $\lambda (\mu \overrightarrow{v}) = (\lambda \mu) \overrightarrow{v}$,

II. $1 \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

(ii) *Seštevanje vektorjev*

Vsota vektorjev $\overrightarrow{v}$ in $\overrightarrow{u}$ s skupno začetno točko, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$, je vektor, ki gre iz začetne točke do diagonalno nasprotne točke v paralelogramu, ki ga napenjata dana vektorja (*glej Sliko 6.3*).



Slika 6.3: Geometrijska reprezentacija vsote dveh vektorjev.

Naštejmo lastnosti seštevanja vektorjev.

III. Komutativnost:

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} .$$

IV. Asociativnost:

$$(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}).$$

V. Nevtralni element (ali enota) je ničelni vektor $\overrightarrow{0}$ (vektor z enako začetno in končno točko):

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}.$$

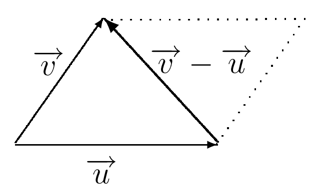
VI. Za vsak vektor $\overrightarrow{v}$ obstaja nasprotni vektor $-\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}.$$

Običajno uporabljamo zapis

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$$

in govorimo o *odštevanju vektorjev.* Razlika vektorjev je prikazana na Sliki 6.4 in sicer je to vektor, ki ima začeteno točko v koncu dugega vektorja in končno točko v koncu prvega vektorja.



Slika 6.4: Geometrijska reprezentacija razlike vektorjev.

Velja še lastnost, ki povezuje obe računski operaciji:

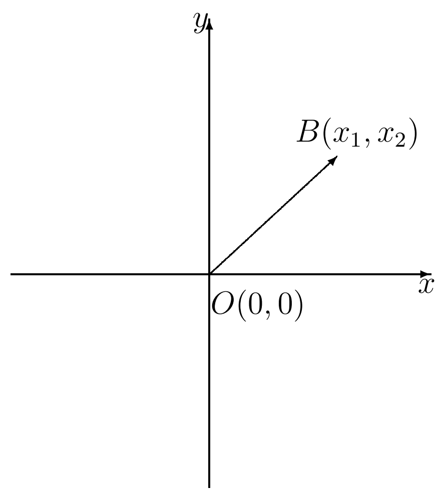
VII. Distributivnosti (v skalarjih in vektorjih):

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\,\overrightarrow{v} &= \lambda\,\overrightarrow{v} + \mu\,\overrightarrow{v},\\ \lambda\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= \lambda\,\overrightarrow{u} + \lambda\,\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

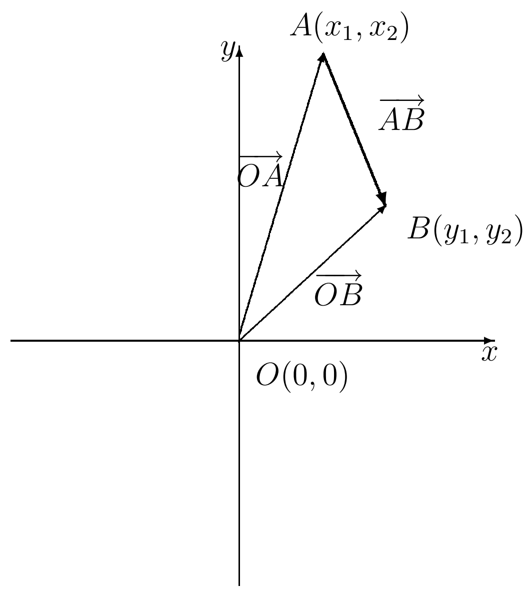
Da bi z vektorji lažje računali, jih postavimo v koordinatni sistem. Naj bo začetna točka vektorja $\overrightarrow{v}$ v izhodišču $O(0,0)$ dvorazsežnega koordinatnega sistema in končna točka B naj ima koodinati $B(y_1, y_2)$, kot je to razvidno s Slike 6.5. Tedaj zapisujemo vektor $\overrightarrow{v}$ kot

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (y_1, y_2).$$

Vidimo, da je v tem primeru vektor $\overrightarrow{v}$ element $\mathbb{R}^2$, to je dvorazsežnega realnega prostora oziroma ravnine.



Slika 6.5: Vektor v koordinatnem sistemu.



Slika 6.6: Vektor med točkama A in B v ravnini.

Naj ima sedaj vektor $\overrightarrow{v}$ začetno točko v $A(x_1, x_2)$ in končno v točki $B(y_1, y_2)$. Tedaj je vektor $\overrightarrow{v}$ enak razliki vektorjev $\overrightarrow{OB}$ in $\overrightarrow{OA}$, kot je to razvidno s Slike 6.5:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (y_1, y_2) - (x_1, x_2) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)\,.$$

Dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$, je enaka

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}\,.$$

Podobno kot smo naredili v ravnini $\mathbb{R}^2$, lahko vektorje postavimo tudi v trirazsežni koordinatni sistem $\mathbb{R}^3$. Vse prej naštete lastnosti obeh računskih operacij veljajo tudi v tem primeru.

Vektor z začetno točko v izhodišču koordinatnega sistema je v $\mathbb{R}^3$ določen z urejeno trojico

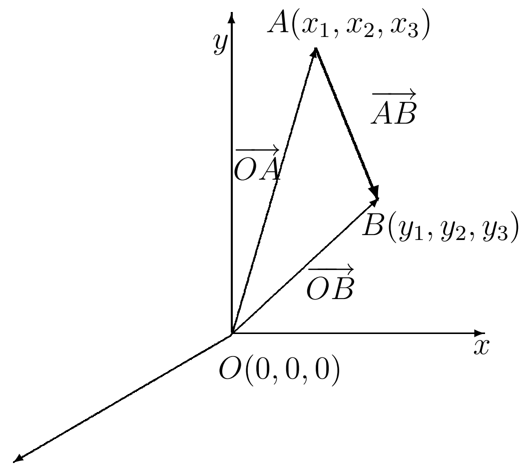
$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3)\,.$$

Vektor med točkama $A(x_1, x_2, x_3)$ in $B(y_1, y_2, y_3)$ je enak (*glej Sliko 6.7*)

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)\,.$$

Njegova dolžina je

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}\,.$$



Slika 6.7: Vektor med točkama A in B v trirazsežnem vektorskem prostoru.

Podobno, kot smo sedaj definirali računski operaciji seštevanja in množenja s skalarjem v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ju lahko definiramo v n-razsežnem realnem prostoru $\mathbb{R}^n$, katerega elementi so urejene n-terice $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Množenje s skalarjem :

$$\lambda\,(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, ..., \lambda\, x_n)\,.$$

Seštevanje :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,.$$

Tudi v tem primeru obe računski operaciji zadoščata vsem lastnostim od I. do VII. Te lastnosti, ki smo jih pokazali na geometrijskih vektorjih, veljajo tudi v nekaterih dugih prostorih, ki so za naravoslovne vede in matematiko zelo pomembni. Zato definirajmo:

Definicija 6.28. *Naj bo V množica na kateri sta definirani operaciji seštevanja elementov iz V in množenja le teh s skalarji. Če je zadoščeno vsem lastnostim od I. do VII., tedaj V imenujemo* vektorski prostor*. Elemente prostora V imenujemo* vektorji.

Za vsako pozitivno število n je $V = \mathbb{R}^n$ vektorski prostor, ki ga imenujemo *n-razsežen realni vektorski prostor*.

Naj bosta V vektorski prostor in naj bo W podmnožica od V. Če je W tudi sam vektorski prostor, ga imenujemo *vektorski podprostor* od V.

Če želimo pokazati, da je nek vektorski prostor podprostor drugega prostora, ni potrebno preverjati vseh lastnosti, temveč samo zaprtost za množenje s skalarjem in seštevanje vektorjev.

Primer 6.29. *Preveri, ali sta dani množici vektorska podprostora.*

1. *Naj bo W množica vseh točk oblike $(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ali je W vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$?*

   Preveriti moramo zaprtost za seštevanje in množenje s skalarjem. Naj bosta $\overrightarrow{x} = (0, x_2, x_3)$ in $\overrightarrow{y} = (0, y_2, y_3)$ poljubna elementa iz množice W. Tedaj je njuna vsota

   $$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (0, x_2, x_3) + (0, y_2, y_3) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

   prav tako element množice W. Nadalje naj bo λ poljuben skalar. Tedaj je

   $$\lambda\,\overrightarrow{x} = \lambda\,(0, x_2, x_3) = (0, \lambda\,x_2, \lambda\,x_3)$$

   tudi v W, ki je zato vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$.

2. *Naj bo W množica vseh točk oblike $(1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ali je W vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$?*

   Preveriti moramo podobno kot prej zaprtost za seštevanje in množenje s skalarjem. Naj bosta sedaj $\overrightarrow{x} = (1, x_2, x_3)$ in $\overrightarrow{y} = (1, y_2, y_3)$ poljubna elementa iz množice W. Tedaj je njuna vsota

   $$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (1, x_2, x_3) + (1, y_2, y_3) = (2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

   in očitno ni element množice W, ki zato ni vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$.

Splošno velja, da vsak vektorski podprostor vsebuje koordinatno izhodišče, to je ničelni vektor.

Definicija 6.30. *Naj bo* $\overrightarrow{w}$ *vektor iz vektorskega prostora* $V = \mathbb{R}^n$. *Vektor* $\overrightarrow{w}$ *je* linearna kombinacija *vektorjev* $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_k$, *ki so prav tako elementi vektorskega prostora* $V = \mathbb{R}^n$, *če obstajajo skalarji* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *takšni, da velja*

$$\overrightarrow{w} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{v}_k \, .$$

Opomba. Pravimo tudi, da se $\overrightarrow{w}$ da izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \cdots, \overrightarrow{v}_k$.

Primer 6.31. *Preverimo, ali so vektorji linearne kombinacije podanih vektorjev.*

1. *Ali vektor* $(2, 4) \in \mathbb{R}^2$ *lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev* $(2, 1)$ *in* $(0, 1)$*?*

   Preveriti moramo, če obstajata skalarja λ_1 in λ_2 takšna, da velja

   $$(2, 4) = \lambda_1(2, 1) + \lambda_2(0, 1) \, .$$

   Rešujemo sistem

   $$\begin{aligned} 2 &= 2\,\lambda_1 \\ 4 &= \lambda_1 + \lambda_2 \, , \end{aligned}$$

   katerega rešitev je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$ in odgovor je da.

2. *Ali vektor* $(1, -4) \in \mathbb{R}^2$ *lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev* $(2, 10)$, $(-3, 15)$*?*

   V tem primeru iščemo skalarja λ_1 in λ_2, ki bi zadoščala zvezi

   $$(1, -4) = \lambda_1(2, 10) + \lambda_2(-3, 15) \, .$$

   Rešujemo sistem

   $$\begin{aligned} 1 &= 2\,\lambda_1 - 3\,\lambda_2 \\ -4 &= 10\,\lambda_1 + 15\,\lambda_2 \, . \end{aligned}$$

   Pomnožimo prvo enačbo z -5 in ju seštejemo, kar na da

   $$-9 = 0 \, .$$

   To pomeni, da se vektor $(-1, 4)$ ne da izraziti kot linearna kombinacija podanih vektorjev.

3. *Ali vektor* $(5, 4, -2) \in \mathbb{R}^3$ *lahko zapišemo kot linearn kombinacijo vektorjev* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *in* $(0, 0, 1)$*?*

   Sedaj iščemo skalarje λ_1, λ_2 in λ_3, ki zadoščajo

   $$(5, 4, -2) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) \, .$$

   V tem primeru je rešitev ustreznega sistema trivialna in sicer je $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$ in $\lambda_3 = -2$.

Opazimo, da so vektorji v zadnjem primeru še posebej uporabni za izražanje linearne kombinacije vektorjev zato imajo posebno ime, kot je zapisano v spodnji definiciji.

Definicija 6.32. *Vektorji*

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,...,0),\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0,...,0),...,\overrightarrow{e_n} = (0,0,0,...,1)$$

so standardni bazni vektorji *vektorskega prostora* $\mathbb{R}^n$*.*

Primer 6.33. *Izrazimo pojuben vektor* $(a_1, a_2, ...a_n) \in \mathbb{R}^n$ *kot linearno kombinacijo standardnih baznih vektorjev.*

Iščemo skalarje $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, ki zadoščajo zvezi

$$(a_1, a_2, ...a_n) = \lambda_1(1,0,0,...,0) + \lambda_2(0,1,0,...,0) + \cdots + \lambda_n(0,0,0,...,1)\,.$$

Očitno je rešitev sistema $\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2, ..., \lambda_n = a_n$.

V Primeru 6.33 smo videli, da lahko poljuben vektor iz $\mathbb{R}^n$ izrazimo kot linearno kombinacijo usteznih standardnih baznih vektorjev (iz $\mathbb{R}^n$).

Naj bo $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k\}$ množica vektorjev vektorskega prostora $V = \mathbb{R}^n$. Poglejmo, kaj lahko povemo o rešitvah vektorske enačbe

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}\,, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\,,\ \overrightarrow{0} = (0,0,...,0)\,.$$

Taki vektorski enačbi bomo rekli *ničelna linearna kombinacija.* Očitno so skalarji $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ rešitve ničelne linearne kombinacije. Tem rešitvam pravimo *trivialna rešitev* vektorske enačbe. Trivialna rešitev vedno obstaja. Včasih pa obstajajo tudi kake druge (neničelne rešitve), kar vidimo na Primeru 6.34.

Primer 6.34. *Poiščimo netrivialno rešitev ničelne linearne kombinacije*

$$\lambda_1\,(-4,1,2) + \lambda_2\,(1,0,-1) + \lambda_3(2,-1,0) = (0,0,0)\,.$$

Rešimo vektorsko enačbo

$$\begin{aligned}(-4\,\lambda_1, \lambda_1, 2\,\lambda_1) + (\lambda_2, 0, -\lambda_2) + (2\,\lambda_3, -\lambda_3, 0) &= (0,0,0)\\ (-4\,\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3, 2\,\lambda_1 - \lambda_2) &= (0,0,0)\,.\end{aligned}$$

Dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}-4\,\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0\\ 2\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0\,.\end{aligned}$$

Z Gaussovo eliminacijo rešimo sistem:

$$
\begin{aligned}
[A,0] &= \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Sistem ima enoparametrično rešitev oblike $\lambda_2 = 2\lambda_3$ in $\lambda_1 = \lambda_3$. Če vpeljemo parameter $\lambda_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tedaj je $\lambda_2 = 2\,t$ in $\lambda_1 = t$. To pomeni, da nimamo samo trivialne rešitve, ampak je rešitev tudi vsak vektor oblike

$$
\begin{bmatrix} t \\ 2\,t \\ t \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}\,.
$$

.

Definicija 6.35. *Množica* $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k\}$ *vektorjev vektorskega prostora* $V = \mathbb{R}^n$ *je* linearno neodvisna*, če ima ničelna linearna kombinacija vektorjev iz* S *samo trivialno rešitev.*

Drugače povedano, množica vektorjev $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_k\}$ *je linearno neodvisna natanko tedaj, ko velja*

$$
\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; \lambda_i = 0, \forall\, i = 1, 2, ..., k\,.
$$

Primer 6.36. *Preverimo linearno neodvisnost množic.*

1. *Ali je množica vektorjev* $\{(-1,0,2), (\frac{1}{2}, 0, -1)\}$ *linearno neodvisna.*

   Na Primeru 6.34 smo videli, da ima ničelna linearna kombinacija teh dveh vektorjev netrivialno rešitev, zato množica ni linearno neodvisna.

2. *Ali je množica vektorjev* $\{(3,1,2), (1,0,-1), (2,-1,0)\}$ *linearno neodvisna.*

   Postopamo podobno kot v rimeru 6.34, torej iščemo rešitve ničelne linearne kombinacije teh treh vektorjev. Če obstaja samo trivialna rešitev, tedaj so linearno neodvisni, sicer bodo linearno odvisni. Rešujemo vektorsko enačbo

   $$\lambda_1(3,1,2) + \lambda_2(1,0,-1) + \lambda_3(2,-1,0) \;=\; (0,0,0)\,.$$

   Dobimo sistem linearnih enačb

   $$
   \begin{aligned}
   3\,\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 &= 0 \\
   \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\
   2\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0\,.
   \end{aligned}
   $$

Izračunajmo determinanto pripadajoče matrike koeficientov:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7\,.$$

Ker je determinanta različna od 0, ima po Izreku 6.26 homogeni sistem samo trivialno rešitev in je po Definiciji 6.35 množica S linearno neodvisna.

Na tem mestu lahko omenimo, da smo poseben primer linearne odvisnosti oziroma neodvisnosti že srečali pri navadnih diferencialnih enačbah drugega reda, le da smo tam namesto o neodvisnosti geometrijskih vektorjev preverjali neodvisnost rešitev diferencialne enačbe.

Definicija 6.37. *Naj bo* $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ *množica vektorjev vektorskega prostora* $V = \mathbb{R}^n$. *Tedaj je* S baza *vektorskega prostora natanko tedaj, ko je* S *linearno neodvisna množica. Elemente baze imenujemo* bazni vektorji.

Primer 6.38. *Preverimo, ali tvorijo vektorji množice* S *bazo vektorskega prostora* V.

1. $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   Preveriti je treba linearno neodvisnost vektorjev iz S, kar pomeni, da lahko ima ničelna linearna kombinacija samo trivialno rešitev:

   $$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) \;=\; (0,0,0)\,.$$

   Iz Primera 6.33 sledi, da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, zato je S baza.

2. $S = \{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$, $V = \mathbb{R}^n$.

   Ta primer je posplošitev prejšnjega in se pokaže na analogen način.

3. $S = \{(0,1,1),(0,1,2),(2,0,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$. Preverimo rešitve ničelne linearne kombinacije:

   $$\lambda_1\,(0,1,1) + \lambda_2\,(0,1,2) + \lambda_3\,(2,0,-1) \;=\; (0,0,0)\,.$$

   Zapišimo pripadajoči sistem

   $$\begin{aligned} 2\,\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\,\lambda_2 - \lambda_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Po Izreku 6.26 ima homogeni sistem trivialno rešitev natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Izračunajmo determinanto:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2(2-1) \\ &= 2 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Torej ima sistem samo trivialno rešitev, kar pomeni, da je množica S linearno neodvisna in je zato baza.

Izrek 6.39. *Če je množica vektorjev $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ baza vektorskega prostora $V = \mathbb{R}^n$, tedaj lahko vsak vektor $\overrightarrow{u} \in V = \mathbb{R}^n$ na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz S.*

Dokaz. Ker je S baza, lahko $\overrightarrow{u}$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz S, to je, obstajajo skalarji $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ takšni, da je

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n\,.$$

Predpostavimo nasprotno, torej da ta zapis ni enoličen. Potemtakem obstajo skalarji $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ takšni, da je

$$\overrightarrow{u} = \mu_1 \overrightarrow{v}_1 + \mu_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{v}_n\,,$$

pri čemer obstaja i tak, da je $\lambda_i \neq \mu_i$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$. Poglejmo si razliko

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} &= \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n - (\mu_1 \overrightarrow{v}_1 + \mu_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \mu_n \overrightarrow{v}_n) \\ \overrightarrow{0} &= (\lambda_1 - \mu_1) \overrightarrow{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \overrightarrow{v}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) \overrightarrow{v}_n\,. \end{aligned}$$

Ker je množica S linearno neodvisna, je lahko ničelna samo trivialna linearna kombinacija, kar pomeni, da so vsi skalarji pred vektorji enaki 0:

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \lambda_2 - \mu_2 = 0, ..., \lambda_n - \mu_n = 0$$

oziroma

$$\lambda_i = \mu_i\,, \quad \forall\, i = 1, 2, ..., n\,,$$

kar pomeni, da ne obstaja i tak, da bi $\lambda_i \neq \mu_i$.

■

Primer 6.40. *Razvijmo vektor* $(-4,7,1) \in \mathbb{R}^3$ *po bazi iz Primera 6.38 točka 3.*

Poiskati moramo enolično določene skalarje λ_i, $i = 1,2,3$, ki rešijo vektorsko enačbo

$$(-4,7,1) = \lambda_1\,(0,-1,1) + \lambda_2\,(0,1,2) + \lambda_3\,(2,0,-1)\}\,.$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} -4 &= 2\,\lambda_3 \\ 7 &= -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 &= \lambda_1 + 2\,\lambda_2 - \lambda_3\,, \end{aligned}$$

katere rešitev je

$$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2\,.$$

6.5 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Jedro tega razdelka je izračunavanje lastnih vrednosti matrike in iskanje pripadajočih lastnih vektorjev.

Problem lastnih vrednosti v matrični obliki formuliramo takole. Naj bo dana kvadratna matrika A reda n. Poiskati želimo vse take skalarje λ in neničelne vektorje $\overrightarrow{x}$, da bo veljalo

$$A\,\overrightarrow{x} = \lambda\,\overrightarrow{x}\,.$$

Skalarje λ, ki zadoščajo temu pogoju, imenujemo *lastne vrednosti* matrike A, pripadajoči vektor $\overrightarrow{x}$ pa je *lastni vektor* matrike A.

Tega se ne da zmeraj narediti in nas bo zanimalo, za katere skalarje λ in vektorje $\overrightarrow{x}$ se da.

Uporabimo enotsko matriko I in zapišimo enačbo v modificirani obliki:

$$\begin{aligned} A\,\overrightarrow{x} &= \lambda\,\overrightarrow{x} \\ A\,\overrightarrow{x} &= \lambda\,I\,\overrightarrow{x} \\ (A - \lambda\,I)\,\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{0}\,. \end{aligned}$$

Matriko $A - \lambda I$ imenujemo *karakteristična matrika* matrike A:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}.$$

Po Izreku 6.26 ima matrična enačba

$$(A - \lambda\, I)\, \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

neničelno (netrivialno) rešitev natanko tedaj, ko je determinanta karakteristične matrike enaka 0.

Determinanta karakteristične matrike

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

je polinom $p(\lambda)$, ki ga imenujemo *karakteristični polinom* matrike A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)\,.$$

Ničle karakterističnega polinoma so tako lastne vrednosti matrike A.

Primer 6.41. *Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{matrix} 2 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{matrix} \right] = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)\,.$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_1 = -2$. Poiščimo še pripadajoča lastna vektorja. Najprej za $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{aligned} (A - 3\, I)\overrightarrow{x} &= 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morata x_1 in x_2 zadoščati pogoju

$$x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2\,.$$

Označimo x_2 s parametrom t, torej naj bo $x_2 = t$. Pri tem parameter t poljubno izbiramo, torej je $t \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji so oblike

$$\begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Naravno je izbrati za t najpreprostejši primer, to je $t = 1$. Tedaj je lastni vektor, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda_1 = 3$ enak

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poglejmo še za $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{aligned} (A + 2\,I)\overrightarrow{x} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morata x_1 in x_2 zadoščati pogoju

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2\,.$$

Vpeljemo parameter $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$ in izračunamo $x_1 = -t$. Torej je drugi lastni vektor

$$\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Za $t = 1$ dobimo drugi lastni vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ni težko preveriti, da sta lastna vektorja linearno neodvisna.

V obeh zgornjih primerih sta bili lastni vrednosti različni in enkratni ničli karakterističnega polinoma. Takim lastnim vrednostim pravimo *enostavne lastne vrednosti*. Kadar se neka ničla pojavi m-krat, pravimo, da je njena *kratnost* enaka m.

Primer 6.42. *Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{matrix} 7-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{matrix} \right] = (\lambda - 5)^2 = 0\,.$$

Dvojna lastna vrednost matrike A je $\lambda_{1,2} = 5$. Poiščimo še lastne vektorje.

$$\begin{aligned} (A - 5\,I)\overrightarrow{x} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morata x_1 in x_2 zadoščati pogoju

$$2\,x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2\,x_1\,.$$

Označimo x_1 s parametrom t, torej naj bo $x_1 = t$, kjer je $t \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji so oblike

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Naravno je izbrati za t najpreprostejši primer, to je $t = 1$. Tedaj je lastni vektor enak

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo lastno vrednost, katere kratnost je enaka 2, pripada pa ji en sam lastni vektor.

Namenoma smo se izognili iskanju lastnih vektorjev kompleksnih lastnih vrednosti, saj bi le-te morali iskati v kompleksnih vektorskih prostorih, o katerih pa nismo ničesar povedali. Prav tako se lahko zgodi, da neenostavni lastni vrednosti pripada več linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kar vidimo v Primeru 6.43.

Primer 6.43. *Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{matrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix} \right] = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0\,.$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_{1,2} = -1$ in $\lambda_3 = 2$. Poiščimo še pripadajoče lastne vektorje. Najprej za $\lambda_{1,2} = -1$:

$$\begin{aligned} (A + I)\overrightarrow{x} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

To pomeni, da morajo x_1, x_2 in x_3 zadoščati pogoju

$$x_1 + x_2 + x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 - x_2\,.$$

Naj bo $x_1 = t$ in $x_2 = s$, kjer sta $t, s \in \mathbb{R}$. Lastni vektorji so oblike

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ -t - s \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Vrednosti za t in s izberemo na najpreprostejši primer tako, da bosta dobljena vektorja linearno neodvisna in sicer $t = 1, s = 0$ in $t = 0, s = 1$. Pripadajoča lastna vektorja sta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

ki sta seveda linearno neodvisna. Dobili smo lastno vrednost, katere kratnost je enaka 2 in ji pripadata dva linearno neodvisna lastna vektorja.

Poglejmo še za $\lambda_3 = 2$:

$$(A - 2\,I)\overrightarrow{x} \;=\; 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev pripadajočega sistema je

$$x_1 = x_2 = x_3\,.$$

Naj bo $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tedaj je lastni vektor

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Za $t = 1$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Izkaže se, da ima lastna vrednost kratnosti m lahko od 1 do m linerno neodvisnih lastnih vektorjev.

Ni se težko prepričati v veljavnost naslednjega izreka, zato je dokaz prepuščen bralcu.

Izrek 6.44. *Naj bo A zgornje ali spodnje trikotna matrika. Tedaj so lastne vrednosti matrike A njeni diagonalni elementi.*

Primer 6.45. *Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$p(\lambda) = \left| \begin{matrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{matrix} \right] = (3-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0\,.$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Poiščimo še pripadajoče lastne vektorje. Najprej za $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3\,I)\overrightarrow{x} \;=\; 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev pripadajočega sistema je

$$x_1 = \frac{8}{7}x_3,\ x_2 = -\frac{4}{7}x_3\,.$$

Naj bo $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, tedaj je lastni vektor

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{7}t \\ -\frac{4}{7}t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Da se znebimo ulomkoj je primerno izbrati $t = 7$ in dobimo

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Na podoben način dobimo še druga dva lastna vektorja in sicer sta

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6.6 Diagonalizacija matrik

Problem diagonalizacije matrike je v tesni povezavi z njenimi lastnimi vektorji. Za začetek poglejmo, kaj sploh je diagonalizacija matrike.

Definicija 6.46. *Naj bo A kvadratna matrika reda n in naj obstaja obrnljiva matrika P reda n takšna, da je $P^{-1}AP$ diagonalna matrika. Tedaj pravimo, da je A* diagonalizabilna matrika, *za matriko P pa pravimo, da* diagonalizira *matriko A.*

Naslednji izrek nam bo povedal, kdaj je matrika A diagonalizabilna. Sam dokaz nam da postopek za diagonalizacijo matrike, a ga zaradi preskromnega poznavanja vektorskih prostorov ne bomo izpeljali. Na primeru bomo izvedli postopek diagonalizacije matrike.

Izrek 6.47. *Naj bo A kvadratna matrika reda n. Tedaj sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) A je diagonalizabilna,

(ii) A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Primer 6.48. *Diagonalizirajmo matriko A*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Potrebujemo dva linearno nedvisna lastna vektorja in to sta ravno lastna vektorja matrike A. Stolpce matrike P sestavljajo linearno neodvisni lastni vektorji:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in obratna matrika je

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še produkt

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = D\,.$$

Primer 6.49. *Diagonalizirajmo matriko A*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiščemo lastne vrednosti, ki so $-1, -1$ in 2 ter pripadajoče lastne vektorje, ki jih zapišemo kot stolpce matrike P:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obratna matrika je

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še produkt

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D\,.$$

Na obeh primerih opazimo, da so diagonalni elementi diagonalizirane matrike A reda n, natanko lastne vrednosti. To drži ob pogoju, da premore matrika A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, a tega ne bomo dokazovali, več o tem najdete v [4].

6.7 Naloge

Matrike in determinanta

1. Izračunaj $3A - 2B$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj $5(A+3C) - A + (B-5C)$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Če obstajata, izračunaj produkta AB in BA:

   a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Izračunaj AA^T in A^TA, če je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

5. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Brez obratne matrike reši matrično enačbo $AX = B$.

6. Izračunaj determinanti matrik A in B, če je

$$A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. V kakšni povezavi morata biti števili x in y, da bo determinanta matrike A enaka 1, če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 & y & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Izračunaj

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Izračunaj

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

10. Izračunaj

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

11. Izračunaj

$$A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

12. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj A^{-1}.

13. Izračunaj $A^{-1} + A^T B$, če je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Reši matrično enačbo

$$AXB = C\,,$$

če so

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

15. Reši matrično enačbo

$$AX + 2I = A\,,$$

če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

16. Reši matrično enačbo

$$(A - 2I)X = A + I\,,$$

če je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Reši matrično enačbo

$$AX^T B + C = D\,,$$

če so

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 16 & 17 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}.$$

18. Poišči vsa realna števila x, za katera matrika A ni obrnljiva:

$$A = \begin{bmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{bmatrix}.$$

Sistemi linearnih enačb

1. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + z &= -1 \\
x + y + z &= 6 \\
y + 3x - 2z &= -1\,.
\end{aligned}
$$

2. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$
\begin{aligned}
2x - y + z &= 1 \\
2x - 6z &= 2 \\
-y + 7z &= 10\,.
\end{aligned}
$$

3. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$
\begin{aligned}
2x - y + 4z &= 2 \\
2x + 4y - 6z &= 12 \\
4x + 3y - 2z &= 14\,.
\end{aligned}
$$

4. Reši sistem enačb

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 11 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 3 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\
x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 5
\end{array}
$$

s pomočjo

a) Cramerjevega pravila,

b) Gaussove eliminacijske metode.

5. Poišči vse rešitve sistema enačb

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 3 \\
-9x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & + & 10x_5 & = & -2 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 4\,.
\end{array}
$$

6. Obravnavaj sistem enačb glede na parameter a:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= a \\
3z + ay + x &= 0 \\
ax + y + 3z &= 0\,.
\end{aligned}
$$

7. Dan je sistem enačb s parameterom a:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= -1 \\
9x + 6y + az &= 3 \\
5x + 4y + z &= 0\,.
\end{aligned}
$$

a) Reši sistem za $a = 3$.

b) Pokaži, da sistem nima rešitve za $a = -1$.

8. Obravnavaj sistem enačb glede na parameter a:

$$\begin{aligned} x + y + 3\,z &= -2 \\ 2\,x - 4\,y + a\,z &= 2 \\ 4\,x + a\,y + 8\,z &= -4\,. \end{aligned}$$

9. Obravnavaj sistem enačb glede na parameter a:

$$\begin{aligned} (3-2a)x + (2-a)y + z &= a \\ (2-a)x + (2-a)y + z &= 1 \\ x + y + (2-a)z &= 1\,. \end{aligned}$$

Rang matrike in lastne vrednosti

1. Določi rang matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 10 & -13 \end{bmatrix}.$$

2. Obravnavaj rang matrike A glede na različne vrednosti realnega števila a:

$$A = \begin{bmatrix} -2-a & 4 & 5+a & 4+a \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -a & 3 & 1+a & 4+a \end{bmatrix}.$$

3. Preveri, ali je množica vektorjev (x_1, x_2, x_3, x_4) iz $\mathbb{R}^5$ linearno neodvisna, če je

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Poišči karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne vektorje matrike:

a)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Poišči karakteristični polinom in lastne vrednosti matrike:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Slike

Literatura

[1] Brešar F., Matematika 3.del, FKKT, Maribor, 1997.

[2] Bronštejn I.N., (et al.), Matematični priročnik, TZS, Ljubljana, 1997.

[3] Butinar B., Matematika 1. in 2. del, FKKT, Maribor, 2007.

[4] Dawkins P., Linear Algebra, e-gradivo,
dosegljivo na *http://tutorial.math.lamar.edu*

[5] Jamnik R., Matematika, DMFA, Ljubljana, 1994.

[6] Vidav I., Matematika 1, DMFA, Ljubljana, 1990.

[7] Vidav I., Algebra, DMFA, Ljubljana, 1980.

Stvarno kazalo