

Skupina odda en skupen izvod **pol ure pred testom v kabinetu A-415**. Naloge naj bodo

1. reševane na bele ali črtaste A4 liste,
2. reševane zaporedoma,
3. čitljivo zapisane,
4. vložene v mapo skupaj z izpolnjenim obrazcem, ki najdete na <https://www.fkkt.um.si/ukemat/VpisniList.pdf>.

Kasneje oddane domače naloge oziroma nečitljivo napisane in brez mape ne bodo upoštevane.

## 2. domača naloga

1. Izračunaj limite zaporedij

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{27n^3 + n^2 + n} - 3n),$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 7^n}{4^n + 3 \cdot 7^{n+2}},$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+5} \right)^{5n},$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2} \right)^{3n}.$

2. Preuči omejenost zaporedij  $(a_n)$  in  $(b_n)$ , ki sta podani s splošnima členoma

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{n + 1} \quad \text{in} \quad b_n = \frac{2n + (-1)^n}{4n + 2}.$$

Če je katero od zaporedij  $(a_n)$  in  $(b_n)$  omejeno, poišči tudi zgornjo in spodnjo mejo tega zaporedja.

3. Zaporedje  $(a_n)$  je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2 - 4}{2n^2 + n + 4}.$$

- (a) Ali nastopa v  $(a_n)$  zaporedju člen  $\frac{1}{4}$ ?
  - (b) Ali je zaporedje konvergentno? Če je, izračunaj limito!
  - (c) Ali je zaporedje monotono in omejeno? Utemelji!
  - (d) V primeru, da limita obstaja, preveri, od katerega člena naprej se vsi členi zaporedja razlikujejo od limitne vrednosti za manj od  $\frac{1}{250}$ .
4. Zaporedje  $(a_n)$  je podano s splošnim členom

$$a_n = \left( \frac{n^2}{n^2 + 4} \right)^{n^3}.$$

Ali je zaporedje omejeno? Utemelji!

5. Določi naravno definicijsko območje realnih funkcij realne spremenljivke.

(a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$

(b)  $f(x) = \frac{3 - x}{x^4 - 16},$

(c)  $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 16x + 15)}{\sqrt{-x^2 - 7x - 10}},$

$$(d) f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{4x^2 - x^2}}},$$

$$(e) f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{\sin(\pi x)},$$

$$(f) f(x) = \ln\left(\frac{2^x - \frac{1}{2}}{\sqrt{4 - x^2}}\right).$$

6. Določi naravno definicijsko območje, zalogo vrednosti in  $f^{-1}$  (če obstaja glede na naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti) ter skiciraj naslednje grafe funkcij

$$(a) f(x) = 2x - x^2,$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{3x - 1},$$

$$(c) f(x) = \sqrt{2 - 5x} + 1,$$

$$(d) f(x) = -\ln(2 - x),$$

$$(e) f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x,$$

$$(f) f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x},$$

$$(g) f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$(h) f(x) = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}.$$

7. Funkciji  $f$  in  $g$  sta podani takole

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x+1} & ; & x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x} & ; & x < 2 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x+4 & ; & x > 0 \\ 2 & ; & x \leq 0 \end{cases}.$$

- (a) Natančno nariši grafa funkcij  $f$  in  $g$ . Ali je funkcija  $f$  zvezna? Utemelji!  
 (b) Izračunaj  $f \circ g$  in  $g \circ f$ .

8. Funkciji  $f$  in  $g$  sta podani s predpisoma

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & ; & x \leq 0 \\ -\frac{1}{2^x} & ; & x > 0 \end{cases}.$$

- (a) Skiciraj grafa funkcij  $f$  in  $g$ .  
 (b) Izračunaj oba kompozitoma funkcij  $f$  in  $g$ .

9. Funkciji  $f$  in  $g$  sta podani takole

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x+1} & ; & x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 4 & ; & x < 3 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1-3x}{x} & ; & x \geq \frac{1}{3} \\ -3 & ; & x < \frac{1}{3} \end{cases}.$$

- (a) Natančno skiciraj grafa funkcij  $f$  in  $g$ .  
 (b) Izračunaj  $f \circ g$  in  $g \circ f$ .

10. Poišči naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije  $f$ ,

$$f(x) = \ln(5e^2 - 4ex - x^2),$$

ter skiciraj njen graf.

11. Izračunaj oba kompozitoma funkcij  $f$  in  $g$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; & x > 0 \\ 4 & ; & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; & x \geq 1 \\ 7 & ; & x < 1 \end{cases}.$$

12. Izračunaj limite

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ ,
- (b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - x\pi}$ ,
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{3x}$ ,
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\pi - \pi^{x+1}}$ ,
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3}}$ ,
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 4} - 1}{x - 5}$ ,
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x - 1}$ ,
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{e^x - e}$ .
- (i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 4} \right)^{2x}$ ,
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + 2x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ,
- (k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - \sqrt{4x^4 + x^2})$ ,
- (l)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - x^2) - \ln(2 + x)}{2x}$ .

13. Ali obstaja realno število  $a$ , da bo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^3-8} & ; \quad x < 2 \\ a & ; \quad x = 2 \\ \frac{2-x}{e^x-e^2} & ; \quad x > 2, \end{cases}$$

zvezna? Utemelji!

Opomba: nalogo reši brez uporabe odvoda.

14. Določi  $a, b \in \mathbb{R}$  tako, da bo funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}-1} & ; \quad x < 0 \\ ax^2 + b & ; \quad 0 \leq x \leq 2 \\ (2x-3)^{\frac{1}{x^3-2x^2}} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

zvezna.

Nalogo reši brez uporabe odvoda.