Navadne diferencialne enačbe

Navadne diferencialne enačbe prvega reda

V celotnem poglavju bo

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Diferencialne enačbe z ločljivima spremeljivkama

Diferencialna enačba z ločljivima spremeljivkama je oblike

$$y'g(y) = f(x)$$

in jo rešujemo

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

1. Poišči splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $y' = -2xy$,

   (b) $y' = 3x^2(1 + y^2)$,

   (c) $yy' = 2(xy + x)$,

   (d) $e^{x+y}y' = e^{2x-y}$.

2. Poišči tisto rešitev naslednjih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:

   (a) $2xy' + y = 0$, $y(4) = 1$,

   (b) $y' + y^2 \sin x = 0$, $y(0) = 0$.

Homogena diferencialna enačba

Homogena diferencialna enačba je oblike

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

in jo rešujemo tako, da vpeljemo novo spremeljivko

$$z = \frac{y}{x}.$$

Tedaj

$$y = z \cdot x \quad \text{in} \quad y' = z'x + z.$$

S to vpeljavo diferencialno enačbo z ločljivima spremeljivkama.

1. Poišči splošno rešitev naslednjih homogenih enačb:
   (a) $2xy' = y - x$,
   (b) $xyy' = x^2 + y^2$,
   (c) $x^2y' = xy - y^2$,
   (d) $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

2. Poišči tisto rešitev naslednjih homogenih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:
   (a) $3y^3 - x^3 = 3xy^2y'$, $y(1) = 2$,
   (b) $xy' = y(\ln y - \ln x)$, $y(1) = 1$.

Linearna diferencialna enačba prvega reda

Linearna diferencialna enačba prvega reda je oblike

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kjer sta f in g poljubni zvezni funkciji. To diferencialno enačbo rešujemo tako, da najprej rešimo

$$y' + f(x)y = 0$$

in dobimo homogoeno rešitev y_H. Po izreku, da je rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y = y_H + y_P,$$

kjer je y_P partikularno rešitev, je potrebno poiskati samo še partikularno rešitev. To lahko ali uganemo, ali pa jo poiščemo z variacijo konstante

$$y_P = C(x)y_H.$$

1. Poišči splošno rešitev naslednjih linearnih diferencialnih enačb:
   (a) $y' = x + \frac{y}{x}$,
   (b) $x^2y' + xy + 1 = 0$,
   (c) $xy' + 2(1 - x^2)y = 1$,
   (d) $y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$,
2. Poišči tisto rešitev naslednjih linearnih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:
   (a) $y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 3$,
   (b) $xy' + xy = 1 - y$, $y(1) = 0$,

Bernoullijeva diferencialna enačba

Bernoullijeva diferencialna enačba (Jakob Bernoulli, 1654 - 1705; Leibniz rešil že leta 1696) je oblike

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha},$$

kjer sta f in g zvezni funkciji (za $\alpha = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $\alpha = 1$ pa homogeno diferencialno enačbo). Recimo $\alpha \notin \{0, 1\}$. Zgornjo enačbo delimo z y^{α}

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$

Sedaj vpeljemo novo spremeljivko $z = y^{1-\alpha}$. Tako je $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ in

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x)$$

oziroma

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x).$$

1. Poišči splošno rešitev naslednjih Bernoullijevih diferencialnih enačb:

   (a) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$,

   (b) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{2yx^4}$,

2. Poišči tisto rešitev naslednjih Bernoullijevih diferencialnih enačb, ki zadošča danemu začetnemu pogoju:

   (a) $y' + y = xy^3$, $y(0) = 1$,

   (b) $2y' + \dfrac{3y}{x \ln x} = 3y^{\frac{1}{3}}$, $y(e) = 0$,

Linearne diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

Linearna diferencialna enačba višjega reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x),$$

kjer so $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ realna števila. Homogeni del te diferencialne enačbe je

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

in rešitve iščemo s pomočjo $y = e^{\lambda x}$, kjer je λ neznani koeficient

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_2\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Iz tega dobimo polinom t.i. karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Ničle karakterističnega polinoma nam bodo dale rešitve diferencialne enačbe. Poglejmo si za $n = 2$. V tem primeru imamo dve ničli.

1. Ničli λ_1, λ_2 sta realni in različni.

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. λ je dvojna realna ničla.

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

3. Ničli λ_1, λ_2 sta konjugirani kompleksni par. Recimo, da $\lambda_1 = a + bi$ in $\lambda_2 = a - bi$. Potem

$$y_H = e^{ax}\left(C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}\right)$$

   Med drugim se izkaže, da je

$$C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx} = D_1 \cos(bx) + D_2 \sin(bx)$$

   in tako

$$y_H = e^{ax}\left(D_1 \cos(bx) + D_2 \sin(bx)\right).$$

   Tako sta $e^{ax}\cos(bx)$ in $e^{ax}\sin(bx)$ partikularni rešitvi.

Podobno lahko razmišljamo za višji red. Kompleksne rešitve bodo vedno nastopale v konjugiranih parih. Za partikularno rešitev imamo anslednje možnosti

(a) Uganemo.

(b) Varicaja konstant. Če imamo diferencialno enačbo drugega reda rešujemo sistem

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$$
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

(c) Nastavki za partukularno rešitev v odvisnosti od f:

(i) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α ni ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x},$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(ii) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α k-kratna ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k,$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(iii) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ ni ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x)),$$

kjer sta $Q_m(x), R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje največ $m = \max\{m1, m2\}$.

(iv) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ je k-kratna ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))x^k,$$

kjer sta $Q_m(x), R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje največ $m = \max\{m1, m2\}$.

1. Poišči splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $y'' = 0$,

   (b) $y'' - y' - 2y = 0$,

(c) $y'' - 2y' + y = 0$,

(d) $y'' + 9y = 0$,

(e) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

(f) $y''' - y'' - y' + y = 0$,

2. Poišči splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $y'' - y' - 2y = 3x$,

(b) $y'' + 4y' + 5y = 2e^x$,

(c) $y'' - 6y' + 9y = 2xe^{3x}$,

(d) $y^{(4)} + y''' - y'' - y' = 4e^x$,

(e) $y^{(5)} + y''' + 1 = x^2$.

3. Poišči rešitve naslednjih diferencialnih enačb pri pogojih:

(a) $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,

(b) $y'' + 2y' + 5y = 17\sin(2x)$,

(c) $y''' - 2y'' + 10y' = 3xe^x$, $y(0) = -\frac{1}{3}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{3}$,

(d) $y''' + 3y'' + 7y' + 5y = 12x - 6$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$, $y''(0) = -2$,

(e) $y'''' + y'' = 7x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{2}$, $y'''(\frac{\pi}{2}) = 8$.

Sistemi linearnih diferencialnih enačb

1. Poišči splošno rešitev homogenega sistema linearnih difeencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

   (a)
   $$\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 5x & + & 2y \\ \dot{y} & = & -4x & - & y \\ \dot{z} & = & 2z & & \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x} & = & x & + & y & + & 2z \\ \dot{y} & = & & & 2y & + & 2z \\ \dot{z} & = & x & - & y & & \end{array}$$