

# Poglavje 1

## Uvodno poglavje

### 1.1 Logika in množice

1. Za naslednje izjave preveri resničnost:

- (a)  $x \in \{\{x\}, \emptyset\}$ ,
- (b)  $\{x\} \in \{\{x\}, \{\{x\}\}\}$ ,
- (c)  $x \in \{\{x\}, \{\{x\}\}\}$ ,
- (d)  $\emptyset = \{\emptyset\}$ ,
- (e)  $\{x\} \subset \{\{x\}, x\}$ .

2. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 < x \leq 5\}$$

in

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \wedge x < 3\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  in  $A \times B$ .

3. Dani sta množici

$$A = \{3n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 6\}$$

in

$$B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ .

4. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x < 2\}$$

in

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x > 5\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ .

5. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 + 2x - 5 \geq 0\}$$

in

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 + 2 = 5\}.$$

Ali je  $A \subseteq B$ ?

6. Dane so množice

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 4\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 4\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 4 < 0\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 4 = 0\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup (B \cap C)$ ,  $B - A$ ,  $C - B$ ,  $A \times D$  ter preveri  $D \subseteq B$ .

7. Poišči potenčno množico množice  $A = \{1, 2, a\}$ .

## 1.2 Matematična indukcija

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$3 \mid (5^n + 2^{n+1}).$$

2. Preveri, ali za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$9 \mid (4^n + 15n + 1).$$

3. Preveri, ali za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$5 \mid (6^n - 5n - 1).$$

4. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

5. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

6. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

7. Preveri, če za poljubno naravno število  $n$  velja:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \leq 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

### 1.3 Realna števila

1. Poišči minimum, infimum, maksimum in supremum v  $\mathbb{R}$ , če obstajajo, za naslednje množice:

- (a)  $A = \mathbb{N}$ ,
- (b)  $B = \mathbb{N} \cap (-5, 5]$ ,
- (c)  $C = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,
- (d)  $C = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,
- (e)  $D = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

2. Naj bo  $M = \{\frac{4x}{1+x} \mid x \geq 0\}$ . Določi minimum, infimum, maksimum in supremum v  $\mathbb{R}$ .

3. Funkcija je podana s predpisom

$$f(x) = \left| -\frac{x}{2} + 4 \right|.$$

- (a) Skiciraj graf funkcije  $f$ .
- (b) Poišči rešitve enačbe  $f(x) = 3$ .

(c) Poišči rešitve enačbe  $f(x) < 3$ .

(d) Poišči rešitve enačbe  $f(x) = 2x + 5$ .

4. Grafično in računsko reši neenačbo

$$|x + 1| < x + 3.$$

5. Poišči rešitve neenačbe

$$|2x + 4| - |3 - x| \leq x.$$

6. Dana je funkcija

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4|.$$

(a) Načrtaj graf funkcije  $f$ .

(b) Reši enačbo  $f(x) = 1$ .

(c) Reši neenačbo  $f(x) > 1$ .

(d) Reši neenačbo  $f(x) \leq 2x - 8$ .

7. Poišči rešitve neenačbe

$$\left| \frac{x + 10}{2x - 4} \right| > 2.$$

8. Poišči rešitve neenačbe

$$||x + 2| - |x - 2|| < \frac{1}{2}.$$

9. Poišči rešitve neenačbe

$$|1 - |x - 1|| < 1.$$

## 1.4 Kompleksna števila

1. Za kompleksno število  $z = \frac{4}{1-i} + i$ , poišči  $\mathcal{R}e(z)$ ,  $\mathcal{I}m(z)$ ,  $\bar{z}$ ,  $|z|$ .

2. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo

(a)  $\mathcal{R}e(z^2) + 2(\mathcal{I}m(z))^2 = 4$ ,

(b)  $\mathcal{I}m(\bar{z}) = \mathcal{I}m(z^2)$ ,

(c)  $iz + z\bar{z} = \frac{3}{4} - i$ .

3. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo

(a)  $z^2 + 9 = 0$ ,

(b)  $z^3 = 2\sqrt{3} + 2i$ .

4. Izračunaj  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2020}$ .

5. Nad množico kompleksnih števil reši enačbo

$$z^7 + 2iz^3 - z = 0.$$

6. Poišči vsa kompleksna števila  $z$ , za katera velja

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}.$$

Vse računsko utemelji in rezultat predstavi v kompleksni ravnini.

7. V kompleksni ravnini skiciraj presek množic

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4iz| \leq 2\sqrt{17}\}$$

in

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 0\}.$$

Vse rezultate računsko utemelji.

8. Reši sistem enačb

(a)  $|z + 1 + i| = 2$ ,  $\operatorname{Re}(z + 1 + i) = 0$ ,

(b)  $|(1 + i)\bar{z}| = 2$ ,  $\operatorname{Re}((1 + i)\bar{z}) = 0$ .

9. Nad množico kompleksnih števil reši enačbo  $z_1 + z_2 = 1 - i$ , če je  $\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{6}$  in  $\operatorname{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{3}$ .

10. Izračunaj

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

pri pogoju, da je  $z$  kompleksno število in velja  $|z| = 1$ .

11. Naj bo  $z \in \mathbb{C}$ . Reši enačbo

$$\sqrt{|z|^2 + 1} + iz = 2\operatorname{Im}\left(\frac{z}{1 + i}\right).$$

## 1.5 Preslikave

1. Kateri od naslednjih predpisov je funkcija:

(a)  $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$ ,

(b)  $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $g = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4)\}$ ,

(c)  $k : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $k = \{(1, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 4), (4, 4), (4, 6)\}$ .

2. Kateri od naslednjih predpisov je injektivna oz surjektivna preslikava:

(a)  $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-2, -1, 1, 2\}$ ,  $f = \{(1, 1), (2, -1), (3, 2), (4, -2)\}$ ,

(b)  $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-2, -1, 1, 2\}$ ,  $g = \{(1, -1), (2, -2), (3, -1), (4, 2)\}$ ,

(c)  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $p(x) = [x]$  ( $p$  predstavlja celi del od  $x$ ; npr.  $[\pi] = 3$ ).

3. Poišči predpis preslikave  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , ki je

(a) injektivna,

(b) surjektivna.

# Poglavje 2

## Realne funkcije

2.1 Zaporedja

2.2 Pregled elementarnih funkcij

2.3 Limita in zveznost funkcije

## Poglavje 3

### Diferencialni račun

3.1 Odvod funkcije

3.2 Višji odvodi

3.3 Geometrijski pomen odvoda

3.4 Diferencial

3.5 L'Hospitalovo pravilo

3.6 Taylorjeva formula

3.7 Risanje grafa funkcije s pomočjo odvoda

3.8 Iskanje ekstremov